Etudiant 1 :

Cours :
Théorème des valeurs intermédiaires. Image d'un segment par une fonction continue. Théorème de la bijection continue strictement monotone.

Exercice 1 :
Donner les domaines de définition et calculer les dérivées de

$$f : x \mapsto \text{Arctan}\left(\frac{1}{2x^2}\right), \quad g : x \mapsto \text{Arctan}\left(\frac{x}{x+1}\right) - \text{Arctan}\left(\frac{x-1}{x}\right)$$

Que peut-on en déduire ?

Exercice 2 :
Soient $p, q > 0$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Montrer que $\forall a, b > 0, \quad \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab$.

Etudiant 2 :

Cours :
Théorème de Rolle.
Théorème des Accroissements finis, Inégalité des Accroissements finis.

Exercice 1 :

1. Montrer que la fonction f définie sur $]1, +\infty[$ par $f(x) = -\ln(\ln x)$ est convexe.
2. En déduire que $\forall x, y \in]1, +\infty[, \ln \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{\ln x \ln y}$.

Exercice 2 :
Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(\sin x)}{x} = 0$.

Exercice 3 :
Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $g(x) = \cos(\sqrt{x})$.
La fonction g est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$?

Etudiant 3 :

Cours :
Fonctions convexes. Définition et caractérisation. Cas des fonctions $\mathcal{C}^1$ et $\mathcal{C}^2$.

Exercice 1 :
La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

Exercice 2 :
Calculer

$$\lim_{n \to +\infty} \ln \left(\frac{\text{Arctan}(n+1)}{\text{Arctan}(n)}\right)^n$$

(Indication : On pourra noter $f : x \mapsto \ln(Arctan(x))$ et utiliser des théorèmes de dérivabilité en les justifiant).

Exercices supplémentaires

Exercice 1

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue, et soient $p, q \in \mathbb{R}^+$.
Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $pf(a) + q(b) = (p + q)f(c)$.

Exercice 2

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, convexe et majorée.
Montrer que f est constante.

Exercice 3

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant $\begin{cases} f(1) = 1 \\ f'(0) > 0 \\ \forall x \in \mathbb{R}, f'(x)f'(f(x)) = 1 \end{cases}$

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f \circ f(x) = x$.
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x$.