Etudiant 1 :

Cours :
Définition d'une série convergente, sa somme et son reste.

Exercice 1 :

1. Montrer que la fonction f définie sur $]1,+\infty[$ par $f(x) = -\ln(\ln x)$ est convexe.
2. En déduire que $\forall x, y \in]1,+\infty[, \ln \dfrac{x+y}{2} \geq \sqrt{\ln x \ln y}$.

Exercice 2 :
Déterminer la nature des séries de termes généraux :

$$u_n = \frac{\ln n}{n^5}, \quad v_n = \ln\left(\frac{3+\sin(1/n)}{3-\sin(1/n)}\right)$$

Etudiant 2 :

Cours :
Fonctions convexes. Définition et caractérisation. Cas des fonctions $\mathcal{C}^1$ et $\mathcal{C}^2$.

Exercice 1 :
Déterminer la nature des séries de termes généraux :

$$u_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n, \quad v_n = \frac{e^{-2n}+n}{n^3+1}$$

Exercice 2 :
Soit $(u_n)_n$ une suite de réels strictement positifs.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$.
Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Etudiant 3 :

Cours :
Convergence absolue d'une série numérique. Lien avec la convergence, exemples et contre-exemples.

Exercice 1 :

1. Démontrer que la fonction ln est concave.
2. Soient p et q dans $\mathbb{R}^{*+}$ tels que $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$.

   Montrer que $\forall a, b \in \mathbb{R}^{+*}$, $ab \leq \dfrac{1}{p}a^p + \dfrac{1}{q}b^q$.

Exercice 2 :
Soit (u_n) une suite de $\mathbb{R}^{+*}$ telle que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

1. On suppose que $a > 1$ (y compris $+\infty$). Montrer que la série $\sum u_n$ diverge.
2. En considérant $u_n = 1/n$ puis $u_n = 1/n^2$, peut-on conclure si $a = 1$?
3. On suppose que $a < 1$. Montrer que la série $\sum u_n$ converge.

   (On pourra essayer de majorer $\displaystyle\prod_{k=p}^{n} \frac{u_{k+1}}{u_k}$ pour un p bien choisi)

Exercices supplémentaires

Exercice 1

Soient $p, q > 0$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Montrer que $\forall a, b > 0, \quad \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q} \geq ab$.

Exercice 2

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, convexe et majorée.
Montrer que f est constante.

Exercice 3

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant $\begin{cases} f(1) = 1 \\ f'(0) > 0 \\ \forall x \in \mathbb{R}, f'(x)f'(f(x)) = 1 \end{cases}$

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f \circ f(x) = x$.
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x$.

Exercice 4

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe, et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe croissante. Montrer que $g \circ f$ est convexe.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{*+}$. Montrer que si $\ln \circ f$ est convexe, alors f l'est aussi.

Exercicce 5

Déterminer la nature des séries de termes généraux :

1. $u_n = \sqrt{n^2 - 1} - n$
2. $u_n = \dfrac{(-1)^n \cos n}{n^2 \sqrt{n}}$
3. $u_n = \dfrac{n^4 \ln(3n)}{e^{2n}}$
4. $u_n = (-1)^n n e^{-n}$
5. $u_n = \ln\left(\cos \dfrac{1}{n}\right)$