Etudiant 1 :

Cours :
Définition d'une série convergente, sa somme et son reste.

Exercice 1 :
Déterminer la nature des séries $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n^5}$, $\quad \sum_{n\geq 1} \ln\left(\frac{3+\sin(1/n)}{3-\sin(1/n)}\right)$.

Exercice 2 :
Montrer que la série $\sum_{n\geq 0}(n+(-1)^n)3^{-n}$ converge et calculer sa somme.

Exercice 3 :
Soit (a_n) une suite de réels positifs, décroissante et convergente vers 0.

1. Montrer que la série $\sum_{n\geq 0}(-1)^n a_n$ est convergente.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k a_k\right| \leq a_{n+1}$.
3. En déduire la nature de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

Etudiant 2 :

Cours :
Séries géométriques et dérivées. Formule du binôme négatif.

Exercice 1 :
Déterminer la nature des séries $\sum_{n\geq 1}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$, $\quad \sum_{n\geq 0} \frac{e^{-2n}+n}{n^3+1}$.

Exercice 2 :
Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} \frac{(n^2+3n+1)x^n}{n!}$ est convergente et calculer sa somme.

Exercice 3 :
Soit $(u_n)_n$ une suite de $\mathbb{R}^{+*}$ et on pose $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{u_n}{1+u_n}$.
Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Etudiant 3 :

Cours :
Convergence absolue d'une série numérique. Lien avec la convergence, exemples et contre-exemples.

Exercice 1 :
Etudier la convergence et, si elle existe, la somme des séries suivantes :

$$\sum_{n\geq 0}\ln\left(1-\frac{1}{n+2}\right), \qquad \sum_{n\geq k}\frac{1}{n!}\binom{n}{k}, \qquad \sum_{n\geq 0}\frac{n^2+1}{4^n}$$

Exercice 2 :
Soit (u_n) une suite de $\mathbb{R}^{+*}$ telle que $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = a \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$.

1. On suppose que $a<1$.
   (a) Soit $\alpha = (1+a)/2$. Montrer que $\exists N \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geq N, u_{n+1} \leq \alpha u_n$.
   (b) Montrer que la série $\sum u_n$ converge.
2. On suppose que $a>1$ (y compris $+\infty$).
   (a) Montrer que $\exists N \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geq N, u_{n+1} \geq u_n$.
   (b) Montrer que la série $\sum u_n$ diverge.
3. En considérant $u_n = 1/n$ puis $u_n = 1/n^2$, peut-on conclure si $a=1$?

Exercices supplémentaires

Exercice 1

Déterminer la nature des séries de termes généraux :

1. $u_n = \sqrt{n^2 - 1} - n$
2. $u_n = \dfrac{(-1)^n \cos n}{n^2 \sqrt{n}}$
3. $u_n = \dfrac{n^4 \ln(3n)}{e^{2n}}$
4. $u_n = (-1)^n n e^{-n}$
5. $u_n = \ln\left(\cos \dfrac{1}{n}\right)$