Etudiant 1 :

Cours :
Définition d'une application injective.
Compléter et démontrer : Si $g \circ f$ est injective, alors ...

Exercice 1 :
Déterminer la nature des séries et calculer leur somme si possible :

$$\sum_{n\geq 1} \ln\left(\frac{3+\sin(1/n)}{3-\sin(1/n)}\right), \quad \sum_{n\geq 0}(n+(-1)^n)3^{-n}$$

Exercice 2 :
Résoudre le système suivant, en fonction du paramètre réel m :

$$\left\{\begin{array}{rcl} mx+y+z &=& m^2 \\ x+my-mz &=& m \\ x-y+mz &=& 1 \end{array}\right.$$

Etudiant 2 :

Cours :
Séries géométriques et dérivées. Formule du binôme négatif.

Exercice 1 :
Montrer que l'application suivante est surjective :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to \mathbb{R}^2 & \\ (x,y,z) & \mapsto & (2x+y, x-3y) \end{array}$$

Déterminer pour tout $X \in \mathbb{R}^3$ l'ensemble de ses antécédents par l'application f.

Exercice 2 :
Déterminer la nature et si possible la somme des séries suivantes :

$$\sum_{n\geq 1}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n, \quad \sum_{n\geq k}\frac{1}{n!}\binom{n}{k}$$

Etudiant 3 :

Cours :
Définition d'une application surjective.
Compléter et démontrer : Si $g \circ f$ est surjective, alors ...

Exercice 1 :
Etudier la convergence et, si elle existe, la somme des séries suivantes :

$$\sum_{n\geq 0}\ln\left(1-\frac{1}{n+2}\right), \qquad \sum_{n\geq 0}\frac{n^2+1}{4^n}$$

Exercice 2 :
Résoudre le système suivant dans $\mathbb{R}^4$:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z+t &=& 1 \\ 2x+y+z+t &=& 2 \\ x+2y+2z &=& 1 \end{array}\right.$$

Exercices supplémentaires

Exercice 1

Déterminer $f(\mathbb{R}^2)$ et $g(\mathbb{R}^3)$ où :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R}^3 & \\ (x,y) & \mapsto & (x-y, -x+2y, 5x-y) \end{array}, \qquad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to \mathbb{R}^2 & \\ (x,y,z) & \mapsto & (2x+y+z, x-2y) \end{array}$$

Exercice 2

Résoudre les systèmes suivants, en fonction des paramètres complexes α, β, γ :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x+y+z & = & 2 \\ 2x+6y-4z & = & 2 \\ -3x-9y+6z & = & \alpha-5 \end{array} \right. , \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} x+y+z & = & 2 \\ x-y+z & = & 4 \\ 2x+y+3z & = & \beta \\ -x+2y+z & = & \gamma \end{array} \right.$$

Exercice 3

Discuter de l'injectivité, de la surjectivité et de la bijectivité des applications suivantes :

$$f_1: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, x-y) \end{array}, \qquad f_2: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ x & \mapsto & (2x, x+2) \end{array}, \qquad f_3: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{1\} & \to & \mathbb{R}\setminus\{-1\} \\ x & \mapsto & \dfrac{1+x}{1-x} \end{array}$$

Exercice 4

Soit f la fonction cosinus, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Déterminer :

$$f(\mathbb{R}), \quad f^{-1}(\mathbb{R}), \quad f^{-1}(\{1\}), \quad f^{-1}(]-1,2]), \quad f^{-1}(f([0,\pi])), \quad f^{-1}(f([0,\pi/2]))$$