Etudiant 1 :

Cours :
Définition d'une application injective.
Compléter et démontrer : Si $g \circ f$ est injective, alors ...

Exercice 1 :
Résoudre en fonction de $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ le système $(S) \left\{ \begin{array}{rcl} 2x + 2y + 3z & = & a \\ x - y & = & b \\ -x + 2y + z & = & c \end{array} \right.$.

En déduire que $M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 2 :
Résoudre suivant les valeurs du réel m le système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x - y + z & = & m \\ mx + y - z & = & 1 \\ x - y + mz & = & 1 \end{array} \right.$$

Etudiant 2 :

Cours :
Définition d'une application surjective.
Compléter et démontrer : Si $g \circ f$ est surjective, alors ...

Exercice 1 :
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^3 - 3A^2 + 3A - I$.
2. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

Exercice 2 :
Résoudre suivant la valeur du réel t le système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (2+t)x + 2y - z & = & 0 \\ 2x + (t-1)y + 2z & = & 0 \\ -x + 2y + (2+t)z & = & 0 \end{array} \right.$$

Etudiant 3 :

Cours :
Matrices inversibles : définition.
Inversibilité d'une matrice triangulaire, diagonale.

Exercice 1 :
Résoudre le système suivant dans $\mathbb{R}^4$:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + y + z + t & = & 1 \\ 2x + y + z + t & = & 2 \\ x + 2y + 2z & = & 1 \end{array} \right.$$

Exercice 2 :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & a & a \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculer $(A + I)^3$. En déduire le calcul de A^n, $\forall n \geq 1$.

Exercices supplémentaires

Exercice 1

Déterminer $f(\mathbb{R}^2)$ et $g(\mathbb{R}^3)$ où :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (x-y, -x+2y, 5x-y) \end{array}, \qquad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (2x+y+z, x-2y) \end{array}$$

Exercice 2

Résoudre les systèmes suivants, en fonction des paramètres complexes α, β, γ :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x+y+z & = & 2 \\ 2x+6y-4z & = & 2 \\ -3x-9y+6z & = & \alpha-5 \end{array} \right. , \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} x+y+z & = & 2 \\ x-y+z & = & 4 \\ 2x+y+3z & = & \beta \\ -x+2y+z & = & \gamma \end{array} \right.$$

Exercice 3

Discuter de l'injectivité, de la surjectivité et de la bijectivité des applications suivantes :

$$f_1: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, x-y) \end{array}, \qquad f_2: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ x & \mapsto & (2x, x+2) \end{array}, \qquad f_3: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{1\} & \to & \mathbb{R}\setminus\{-1\} \\ x & \mapsto & \dfrac{1+x}{1-x} \end{array}$$

Exercice 4

Soit f la fonction cosinus, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Déterminer :

$$f(\mathbb{R}), \quad f^{-1}(\mathbb{R}), \quad f^{-1}(\{1\}), \quad f^{-1}(]-1,2]), \quad f^{-1}(f([0,\pi])), \quad f^{-1}(f([0,\pi/2]))$$

Exercice 5

Vérifier si les matrices suivantes sont inversibles, et calculer si possible leur inverse :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Exercice 6

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Montrer qu'il existe deux suites réelles (a_n) et (b_n) telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = a_n I + b_n A$$

2. Exprimer a_n et b_n en fonction de n et en déduire l'expression de A^n.

Exercice 7

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $A^3 - 3A^2 + 2A - 2I$. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.
2. Soit $B = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer $B^3 - 3B^2 + 6B + 6I$. En déduire que B est inversible et calculer son inverse.