Etudiant 1 :

Cours :
Valeurs propres, vecteurs propres et sous-espaces propres d'une matrice.

Exercice 1 :
Montrer que $M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 2 :
Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

Etudiant 2 :

Cours :
Transposée d'une matrice, définition et propriétés.

Exercice 1 :
Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.
Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A.

Exercice 2 :
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^3 - 3A^2 + 3A - I$.
2. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

Etudiant 3 :

Cours :
Matrices inversibles : définition.
Inversibilité d'une matrice triangulaire, diagonale.

Exercice 1 :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & a & a \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculer $(A+I)^3$. En déduire le calcul de A^n, $\forall n \geq 1$.

Exercice 2 :
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.
Déterminer ses valeurs propres, ses vecteurs propres et ses sous-espaces propres.

Exercices supplémentaires

Exercice 1

Vérifier si les matrices suivantes sont inversibles, et calculer si possible leur inverse :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Exercice 2

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Montrer qu'il existe deux suites réelles (a_n) et (b_n) telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = a_n I + b_n A$$

2. Exprimer a_n et b_n en fonction de n et en déduire l'expression de A^n.

Exercice 3

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $A^3 - 3A^2 + 2A - 2I$. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.
2. Soit $B = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer $B^3 - 3B^2 + 6B + 6I$. En déduire que B est inversible et calculer son inverse.

Exercice 4

Soit $m \in \mathbb{R}$ et A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix}$.
Déterminer les valeurs propres de f et les sous-espaces propres de f.

Exercice 5

Soit $A = (a_{i,j})_{i,j}$ la matrice carrée d'ordre $n \geq 1$ définie par $a_{i,i} = 0$ et $a_{i,j} = 1$ si $i \neq j$.
Montrer que A est inversible et calculer son inverse.