Etudiant 1 :

Cours :
Evenements indépendants : définition et propriétés.

Exercice 1 :
Une urne contient au départ une boule blanche et une boule rouge. On effectue des tirages de cette urne de la façon suivante : si l'on tire une boule blanche, on la remet avec une boule blanche supplémentaire, et on arrête les tirages dès que la boule rouge est obtenue.

1. On note A_n : "le jeu s'arrête au n-ième tirage". Calculer $P(A_n)$.
2. Quelle est la probabilité que le jeu s'arrête ?
   (On pourra déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\forall n \geq 1, \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1}$).

Exercice 2 :
Pour se rendre au lycée, un élève a le choix entre 4 itinéraires A, B, C et D. La probabilité qu'il choisisse A (resp. B et C) est $\frac{1}{3}$ (resp. $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{12}$). La probabilité d'arriver en retard en embruntant A (resp. B, C) est $\frac{1}{20}$ (resp. $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{5}$). En empruntant D, il n'est jamais en retard.

1. Quelle est la probabilité que l'élève arrive en retard ?
2. L'élève arrive en retard. Quelle est la probabilité qu'il ait emprunt l'itinéraire C ?
3. Les événements "l'élève est en retard" et "l'élève a emprunté l'itinéraire C" sont-ils indépendants ?

Etudiant 2 :

Cours :
Formule des probabilités composées, Formule des probabilités totales, Formule de Bayes.

Exercice 1 :
Un sac contient neuf jetons numérotés de 1 à 9. Pour chacune des expériences suivantes, déterminer l'univers, exprimer les événements considérés et calculer leur probabilité.

1. On tire dans le sac une poignée de 2 jetons.
   A : "On obtient le jeton 7 lors du tirage".
   B : "On obtient exactement un jeton portant un numéro pair".
2. On tire successivement 2 jetons sans remise.
   C : "On obtient le jeton 7 lors du tirage".
   D : "On obtient une suite croissante de numéros".
3. On tire successivement avec remise 2 jetons.
   E : "On obtient le jeton 7 lors du tirage".
   F : On obtient une suite strictement croissante de numéros".

Exercice 2 :
On effectue une suite de pile ou face, avec une pièce qui donne pile avec probabilité $p \in]0,1[$. On pose $q = 1 - p$.

1. Soit A_n l'événement : "On obtient la séquence Pile-Face pour la première fois aux n-ième et $(n+1)$-ième lancers". Calculer $P(A_n)$.
2. Soit A l'événement : "On obtient la séquence Pile-Face au moins une fois". Calculer $P(A)$.
3. Soit B l'événement : "On obtient la séquence Pile-Pile avant la séquence Pile-Face". Calculer $P(B)$.

Etudiant 3 :

Cours :
Définition d'une probabilité et ses propriétés.
Définition d'une probabilité conditionnelle.

Exercice 1 :
On mélange les 32 cartes d'un jeu puis on les distribue une à une successivement sans remise. Calculer la probabilité des événements suivants :

1. A : "La dixième carte est l'as de pique"
2. B : "Les quatre premières cartes forment un carré"
3. C : "Tous les piques sont distribués en premier"

Exercice 2 :
On jette deux dés non pipés, un dé noir et un dé blanc.

1. Soient A : "le chiffre du dé noir est pair", B : "le chiffre du dé blanc est impair", et C : "les deux chiffres ont même parité".
   Les événements A, B C sont-ils indépendants 2 à 2 ? mutuellement ?
2. (a) Quelle est la probabilité d'avoir obtenu un double sachant que la somme des points est égale à 8 ?
   (b) Quelle est la probabilité que la somme des points soit égale à 8 sachant que l'on a obtenu un double ?

Exercices supplémentaires

Exercice 1

On lance un dé équilibré une infinité de fois. Calculer la probabilité pour que la face 1 n'apparaisse pas au cours des n premiers lancers. Calculer la probabilité pour que la face 1 n'apparaisse jamais.

Exercice 2

Un ascenseur dessert 8 étages. Six personnes le prennent au rez-de-chaussée. Calculer la probabilité que :

1. 2 personnes au moins descendent au même étage.
2. 2 personnes descendent au même étage, les autres descendent chacune à des étages différents, différents du précédent
3. Une personne descend à un étage, 2 à un autre et 3 à un autre.

Exercice 3

Soit A l'ensemble des nombres à 7 chiffres ne comportant aucun "0". Déterminer les cardinaux suivants :

1. A
2. A_1, ensemble des nombres de A ayant 7 chiffres distincts
3. A_2, ensemble des nombres pairs de A
4. A_3, ensemble des nombres de A dont les chiffres forment une suite strictement croissante (dans l'ordre où ils sont écrits).

Exercice 4

Deux joueurs A et B jouent au jeu suivant, constitué par une succession de parties identiques et indépendantes. A chaque partie, la probabilité que A gagne est $p \in]0;1[$ et la probabilité que B gagne est $q = 1-p$. Un des joueurs est déclaré gagnant dès qu'il a remporté deux parties de plus que l'autre. A commence.
Pour $k \in \mathbb{N}$, on note E_k l'événement 'Lors des $2i$ premières parties, A et B ont remporté le même nombre de parties, ceci pour tout i entre 1 et k ; autrement dit, E_k est l'événement "Il n'y a pas eu de gagnant au cours des $2k$ premières parties".
On pose A_k : "A remporte la k-ième partie", on définit de même B_k.

1. Exprimer, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $P(E_{k+1})$ en fonction de $P(E_k)$. En déduire $P(E_k)$ en fonction de k.
2. Déterminer la probabilité qu'il n'y ait pas de gagnant.
3. On pose, pour $k \in \mathbb{N}^*$, AG_k l'événement "A est déclaré gagnant à la $2k$-ième partie", et AG : "A gagne le jeu". On définit de même BG_k et BG.
   Calculer $P(AG_k)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$, puis $P(AG)$. Calculer de même $P(BG)$, et retrouver la probabilité qu'il y ait un gagnant.