Etudiant 1 :

Cours :
Evenements indépendants : définition et propriétés.

Exercice 1 :
Une urne contient au départ une boule blanche et une boule rouge. On effectue des tirages de cette urne de la façon suivante : si l'on tire une boule blanche, on la remet avec une boule blanche supplémentaire, et on arrête les tirages dès que la boule rouge est obtenue.

1. On note A_n : "le jeu s'arrête au n-ième tirage". Calculer $P(A_n)$.
2. Quelle est la probabilité que le jeu s'arrête ?

   (On pourra déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\forall n \geq 1, \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1}$).

Exercice 2 :

1. Déterminer si les ensembles
$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + 2y + z = 0\} \quad \text{et} \quad B = \{(|x|, -|y|, 0) \ / \ x, y \in \mathbb{R}\}$$
   sont des espaces vectoriels. Si oui, en déterminer une famille génératrice.
2. La famille $(\,(4, 2, 1), (6, 6, 6), (-2, 2, 4)\,)$ est-elle libre dans $\mathbb{R}^3$?

Etudiant 2 :

Cours :
Formule des probabilités composées.
Formule des probabilités totales.
Formule de Bayes.

Exercice 1 :

1. Déterminer si
$$F = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / f(0) = 3\} \quad \text{et} \quad G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 2x - y + 3z = 0\}$$
   sont des espaces vectoriels. Si oui, en trouver une famille génératrice.
2. La famille $((1, 1, 2), (3, 0, 1), (5, 2, 5))$ est-elle libre dans $\mathbb{R}^3$?

Exercice 2 :
On effectue une suite de pile ou face, avec une pièce qui donne pile avec probabilité $p \in]0, 1[$. On pose $q = 1 - p$.

1. Soit A_n l'événement : "On obtient la séquence Pile-Face pour la première fois aux n-ième et $(n + 1)$-ième lancers". Calculer $P(A_n)$.
2. Soit A l'événement : "On obtient la séquence Pile-Face au moins une fois". Calculer $P(A)$.
3. Soit B l'événement : "On obtient la séquence Pile-Pile avant la séquence Pile-Face". Calculer $P(B)$.

Etudiant 3 :

Cours :
Définition et caractérisations d'un sous-espace vectoriel

Exercice 1 :
Pour se rendre au lycée, un élève a le choix entre 4 itinéraires A, B, C et D. La probabilité qu'il choisisse A (resp. B et C) est $\frac{1}{3}$ (resp. $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{12}$). La probabilité d'arriver en retard en embruntant A (resp. B, C) est $\frac{1}{20}$ (resp. $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{5}$). En empruntant D, il n'est jamais en retard.

1. Quelle est la probabilité que l'élève arrive en retard ?
2. L'élève arrive en retard. Quelle est la probabilité qu'il ait emprunt l'itinéraire C ?
3. Les événements "l'élève est en retard" et "l'élève a emprunté l'itinéraire C" sont-ils indépendants ?

Exercice 2 :

1. Déterminer si les ensembles

$$A = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0\} \quad \text{et} \quad B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ /2x - y + z = 0\}$$

   sont des espaces vectoriels. Si oui, en donner une famille génératrice.
2. La famille $((1, 0, 2), (0, -1, 3), (3, 2, 0))$ est-elle libre dans $\mathbb{R}^3$?

Exercices supplémentaires

Exercice 1

On lance un dé équilibré une infinité de fois. Calculer la probabilité pour que la face 1 n'apparaisse pas au cours des n premiers lancers. Calculer la probabilité pour que la face 1 n'apparaisse jamais.

Exercice 2

Deux joueurs A et B jouent au jeu suivant, constitué par une succession de parties identiques et indépendantes. A chaque partie, la probabilité que A gagne est $p \in]0; 1[$ et la probabilité que B gagne est $q = 1 - p$. Un des joueurs est déclaré gagnant dès qu'il a remporté deux parties de plus que l'autre. A commence.
Pour $k \in \mathbb{N}$, on note E_k l'événement 'Lors des $2i$ premières parties, A et B ont remporté le même nombre de parties, ceci pour tout i entre 1 et k ; autrement dit, E_k est l'événement "Il n'y a pas eu de gagnant au cours des $2k$ premières parties".
On pose A_k : "A remporte la k-ième partie", on définit de même B_k.

1. Exprimer, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $P(E_{k+1})$ en fonction de $P(E_k)$. En déduire $P(E_k)$ en fonction de k.
2. Déterminer la probabilité qu'il n'y ait pas de gagnant.
3. On pose, pour $k \in \mathbb{N}^*$, AG_k l'événement "A est déclaré gagnant à la $2k$-ième partie", et AG : "A gagne le jeu". On définit de même BG_k et BG.
   Calculer $P(AG_k)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$, puis $P(AG)$. Calculer de même $P(BG)$, et retrouver la probabilité qu'il y ait un gagnant.

Exercice 3

On jette deux dés non pipés, un dé noir et un dé blanc.

1. Soient A : "le chiffre du dé noir est pair", B : "le chiffre du dé blanc est impair", et C : "les deux chiffres ont même parité". Les événements A, B C sont-ils indépendants 2 à 2 ? mutuellement ?
2. (a) Quelle est la probabilité d'avoir obtenu un double sachant que la somme des points est égale à 8 ?
   (b) Quelle est la probabilité que la somme des points soit égale à 8 sachant que l'on a obtenu un double ?

Exercice 4

Dans l'espace des fonctions réelles à variable réelle, déterminer si les familles suivantes sont libres ou non :

1. $f_1 : x \mapsto \cos(x), \qquad f_2 : x \mapsto \sin(x), \qquad f_3 : x \mapsto \cos(2x)$.
2. $f_1 : x \mapsto \cos(x), \qquad f_2 : x \mapsto \cos(2x), \qquad f_3 : x \mapsto \cos(3x)$.

Exercice 5

Pour les ensembles suivants, montrer que ce sont des espaces vectoriels, puis en déterminer une famille génératrice qui soit libre.

$$F = \{(x, y - 2x, x + y, y + 3x), (x, y) \in \mathbb{R}^2\}, \qquad G = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ \left\{\begin{array}{rcl} x + y + z + t & = & 0 \\ x - y + 2z + t & = & 0 \end{array}\right.\right\}$$