Etudiant 1 :

Cours : Montrer que la réciproque d'une bijection linéaire est linéaire.

Exercice 1 :

1. Déterminer si les ensembles

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + 2y + z = 0\} \quad \text{et} \quad B = \{(|x|, -|y|, 0) \ / \ x, y \in \mathbb{R}\}$$

sont des espaces vectoriels. Si oui, en déterminer une famille génératrice.

2. La famille $(\,(4, 2, 1), (6, 6, 6), (-2, 2, 4)\,)$ est-elle libre dans $\mathbb{R}^3$?

Exercice 2 :
Soit E un ev de base (e_1, e_2), F un ev de base (u_1, u_2, u_3). Soit $f : E \to F$ linéaire de E dans F, définie par

$$f(e_1) = u_1 - 2u_2 + 3u_3, \quad f(e_2) = -u_1 + u_2 - u_3$$

1. Exprimer $f(x)$ pour tout $x \in E$.
2. Déterminer $\mathrm{Im}(f)$ une base de $\mathrm{Im}(f)$.
3. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

Exercice 3 :
Soit E un ev et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2) \Leftrightarrow E = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f)$$

Etudiant 2 :

Cours : Définition d'une famille libre, d'une famille génératrice, d'une base.

Exercice 1 :

1. Déterminer si

$$F = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / f(0) = 3\} \quad \text{et} \quad G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 2x - y + 3z = 0\}$$

sont des espaces vectoriels. Si oui, en trouver une famille génératrice.

2. La famille $((1, 1, 2), (3, 0, 1), (5, 2, 5))$ est-elle libre dans $\mathbb{R}^3$?

Exercice 2 :
Soit E un ev de base (e_1, e_2, e_3), F un ev de base (u_1, u_2). Soit $f : E \to F$ linéaire de E dans F, définie par

$$f(e_1) = u_1 + 2u_2, \quad f(e_2) = -u_1 + u_2, \quad f(e_3) = u_1 - 3u_2$$

1. Exprimer $f(x)$ pour tout $x \in E$.
2. Déterminer $\mathrm{Im}(f)$ une base de $\mathrm{Im}(f)$.
3. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

Exercice 3 :
Soit E un ev et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que

$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2) \Leftrightarrow \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0\}$$

Etudiant 3 :

Cours :
Définition et caractérisations d'un sous-espace vectoriel

Exercice 1 :

1. Déterminer si les ensembles

$$A = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0\} \quad \text{et} \quad B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ /2x - y + z = 0\}$$

   sont des espaces vectoriels. Si oui, en donner une famille génératrice.
2. La famille $((1, 0, 2), (0, -1, 3), (3, 2, 0))$ est-elle libre dans $\mathbb{R}^3$?

Exercice 2 :
Soit E un ev de base (e_1, e_2), F un ev de base (u_1, u_2, u_3). Soit $f : E \to F$ linéaire de E dans F, définie par

$$f(e_1) = u_1 - u_2 + 2u_3, \quad f(e_2) = u_1 + u_2 + u_3, \quad f(e_3) = u_2 - u_3$$

1. Exprimer $f(x)$ pour tout $x \in E$.
2. Déterminer $\mathrm{Im}(f)$ une base de $\mathrm{Im}(f)$.
3. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

Exercice 3 :
Soit E un esv et $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$.
Montrer que $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(g) = \{0\}$ et $E = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(g)$.

Exercices supplémentaires

Exercice 1

Dans l'espace des fonctions réelles à variable réelle, déterminer si les familles suivantes sont libres ou non :

1. $f_1 : x \mapsto \cos(x), \qquad f_2 : x \mapsto \sin(x), \qquad f_3 : x \mapsto \cos(2x).$
2. $f_1 : x \mapsto \cos(x), \qquad f_2 : x \mapsto \cos(2x), \qquad f_3 : x \mapsto \cos(3x).$

Exercice 2

Pour les ensembles suivants, montrer que ce sont des espaces vectoriels, puis en déterminer une famille génératrice qui soit libre.

$$F = \{(x, y - 2x, x + y, y + 3x), (x, y) \in \mathbb{R}^2\}, \qquad G = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ \left\{ \begin{array}{rcl} x + y + z + t & = & 0 \\ x - y + 2z + t & = & 0 \end{array} \right. \right\}$$

Exercice 3

Soient f, g, $h \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = h$, $g \circ h = f$, et $h \circ f = g$.
Montrer que f, g h ont même noyau et même image.

Exercice 4

Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - 3f + 2Id = 0$.
Montrer que $\mathrm{Ker}(f - Id) \cap \mathrm{Ker}(f - 2Id) = \{0\}$ et $\mathrm{Ker}(f - Id) + \mathrm{Ker}(f - 2Id) = E$.