Etudiant 1 :

Cours : Formule de Taylor pour les polynômes.

Exercice 1 :
Soit E un ev de base (e_1, e_2), F un ev de base (u_1, u_2, u_3).
Soit $f : E \to F$ linéaire de E dans F, définie par

$$f(e_1) = u_1 - 2u_2 + 3u_3, f(e_2) = -u_1 + u_2 - u_3$$

1. Exprimer $f(x)$ pour tout $x \in E$. En déduire $\mathrm{Im}(f)$ et une base de $\mathrm{Im}(f)$.
2. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

Exercice 2 :
Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto & P(X+1) - P'(X) \end{array}$.
Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_3[X])$. Déterminer son noyau et son image.

Etudiant 2 :

Cours : Montrer que la réciproque d'une bijection linéaire est linéaire.

Exercice 1 :
Montrer que $(X^2 - 1, (X+1)^2, (X-1)^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ et décomposer $2X^2 - X + 3$ dans cette base.

Exercice 2 :
Soit E un ev de base (e_1, e_2), F un ev de base (u_1, u_2, u_3).
Soit $f : E \to F$ linéaire de E dans F, définie par

$$f(e_1) = u_1 + 2u_2 - 3u_3, \quad f(e_2) = -u_1 + u_2 + 2u_3$$

1. Exprimer $f(x)$ pour tout $x \in E$. En déduire $\mathrm{Im}(f)$ et une base de $\mathrm{Im}(f)$.
2. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

Etudiant 3 :

Cours :

Exercice 1 :
Soit E un ev de base (e_1, e_2), F un ev de base (u_1, u_2, u_3).
Soit $f : E \to F$ linéaire de E dans F, définie par

$$f(e_1) = u_1 - u_2 + 2u_3, \quad f(e_2) = u_1 + u_2 + u_3$$

1. Exprimer $f(x)$ pour tout $x \in E$. En déduire $\mathrm{Im}(f)$ et une base de $\mathrm{Im}(f)$.
2. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

Exercice 2 :
Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & 2XP'(X) - P(2) + 3P(X) \end{array}$.
Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$. Déterminer son noyau et son image.

Exercices supplémentaires

Exercice 1

Soit E un ev et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2) \Leftrightarrow E = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f)$$

$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2) \Leftrightarrow \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0\}$$

Exercice 2

Soit E un esv et $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$.
Montrer que $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(g) = \{0\}$ et $E = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(g)$.

Exercice 3

Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - 3f + 2Id = 0$.
Montrer que $\mathrm{Ker}(f - Id) \cap \mathrm{Ker}(f - 2Id) = \{0\}$ et $\mathrm{Ker}(f - Id) + \mathrm{Ker}(f - 2Id) = E$.

Exercice 4

Soient f, g, $h \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = h$, $g \circ h = f$, et $h \circ f = g$.
Montrer que f, g h ont même noyau et même image.

Exercice 5

Déterminer l'ensemble des polynômes P tels que $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$.

Exercice 6

Déterminer l'ensemble des polynômes P tels que $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$.