Etudiant 1 :

Cours : Théorème du rang, énoncé et démonstration.

Exercice 1 :
Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $\forall P \in \mathbb{R}, \varphi(P) = 3XP' + (X^2-1)P''$.

1. Montrer que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.
2. Déterminer la matrice de φ dans la base canonique de E.
3. Déterminer $\mathrm{Im}(\varphi)$, $\mathrm{Ker}(\varphi)$ et $\mathrm{rg}(\varphi)$.

Exercice 2 :
Soit E un ev de dimension 3, et f un endomorphisme de E tel que $f^2 \neq 0$ et $f^3 = 0$. Soit $\overrightarrow{x_0}$ tel que $f^2(\overrightarrow{x_0}) \neq \overrightarrow{0}$.

1. Montrer que $(\overrightarrow{x_0}, f(\overrightarrow{x_0}), f^2(\overrightarrow{x_0}))$ est une base de E et déterminer la matrice de f dans cette base.
2. Montrer que $\mathrm{rg}(f) = 2$.
3. Montrer que l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec f est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ de base (Id_E, f, f^2).

Etudiant 2 :

Cours : Formules de Leibniz et de Taylor pour les polynômes.

Exercice 1 :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et f un endomorphisme de E tel que $f^3 = f$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$.
2. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f)$.

Exercice 2 : Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $\forall P \in \mathcal{R}_2[X]$, $\varphi(P) = (X^2+\lambda)P'' + (\mu X+1)P'$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Ecrire la matrice de φ dans la base canonique.
3. Déterminer $\mathrm{Ker}(\varphi)$ et $\mathrm{Im}(\varphi)$ pour $\lambda = \mu = -1$.
4. Déterminer $\mathrm{rg}(\varphi)$ suivant les valeurs de λ et μ.

Etudiant 3 :

Cours :
Théorème de la base incomplète.
Matrice d'une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ dans les bases canoniques.

Exercice 1 :
Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $\forall P \in \mathcal{R}_2[X]$, $\varphi(P) = (2X+\alpha)P'(X) + P(X) - \beta P(1)$.
Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$. Déterminer son noyau et son image.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Ecrire la matrice de φ dans la base canonique.
3. Déterminer $\mathrm{Ker}(\varphi)$ et $\mathrm{Im}(\varphi)$ pour $\alpha = \beta = -1$.
4. Déterminer $\mathrm{rg}(\varphi)$ suivant les valeurs de α et β.

Exercice 2 :
Soit E un ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2) \Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2) \Leftrightarrow \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0\} \Leftrightarrow E = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(f)$$

Exercices supplémentaires

Exercice 1

Soit E un esv et $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$.
Montrer que $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(g) = \{0\}$ et $E = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(g)$.

Exercice 2

Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - 3f + 2Id = 0$.
Montrer que $\mathrm{Ker}(f - Id) \cap \mathrm{Ker}(f - 2Id) = \{0\}$ et $\mathrm{Ker}(f - Id) + \mathrm{Ker}(f - 2Id) = E$.

Exercice 3

Soient f, g, $h \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = h$, $g \circ h = f$, et $h \circ f = g$.
Montrer que f, g h ont même noyau et même image.

Exercice 4

Déterminer l'ensemble des polynômes P tels que $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$.

Exercice 5

Déterminer l'ensemble des polynômes P tels que $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$.

Exercice 6

Soient f_1, $f_2$et f_3 les applications réelles définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_1(x) = e^{-x}, \quad f_2(x) = (x+1)e^{-x}, \quad f_3(x) = (x^2 - 1)e^{(x}$$

Soit E l'espace vectoriel engendré par ces 3 applications.

1. Déterminer une base $\mathcal{B}$ de E, en déduire la dimension de E.
2. Soit D l'application d´efinie sur E par : $\forall f \in E, D(f) = f'$.
3. Montrer que $D \in \mathcal{L}(E)$ et déterminer la matrice A de D dans la base $\mathcal{B}$.
4. Calculez A^n pour $n \geq 1$.
5. Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 + x + 1)e^{-x}$. Calculer $f^{(n)}$.
6. Démontrer que D est un automorphisme de E. Déterminer D^{-1} et sa matrice relativement à la base $\mathcal{B}$.

Exercice 7

Soit f un endomorphisme non nul de $\mathbb{R}^3$ tel que $f^2 = 0$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.
2. En déduire que le rang de f est 1.
3. Montrer qu'il existe une base dans laquelle la matrice de f est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}^*$$