Etudiant 1 :

Cours : Théorème du rang, énoncé et étapes de la démonstration.

Exercice 1 :
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de base $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$. On pose $\overrightarrow{u_1} = \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{u_3} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}$.
1. Montrer que $\mathcal{B}' = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$ est une base de E et déterminer les matrices de passage entre les deux bases.
2. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$.
Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 2 :
Soit E un ev de dimension 3, et f un endomorphisme de E tel que $f^2 \neq 0$ et $f^3 = 0$. Soit $\overrightarrow{x_0}$ tel que $f^2(\overrightarrow{x_0}) \neq \overrightarrow{0}$.

1. Montrer que $(\overrightarrow{x_0}, f(\overrightarrow{x_0}), f^2(\overrightarrow{x_0}))$ est une base de E et déterminer la matrice de f dans cette base.
2. Montrer que $\mathrm{rg}(f) = 2$.
3. Montrer que l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec f est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ de base (Id_E, f, f^2).

Etudiant 2 :

Cours : Formules de changement de base.

Exercice 1 :
Soit f un endomorphisme non nul de $\mathbb{R}^3$ tel que $f^2 = 0$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.
2. En déduire que le rang de f est 1.
3. Montrer qu'il existe une base dans laquelle la matrice de f est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}^*$$

Exercice 2 :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et f un endomorphisme de E tel que $f^3 = f$. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

Etudiant 3 :

Cours :
Théorème de la base incomplète.

Exercice 1 :

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$ est une base de $\mathbb{R}^3$ où $\overrightarrow{a} = (0,1,1)$, $\overrightarrow{b} = (1,1,0)$, $\overrightarrow{c} = (1,1,1)$.
2. Ecrire la matrice de f dans la base $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$. En déduire A^n pour $n \geq 1$.

Exercice 2 :
Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - 3f + 2Id = 0$.

1. Montrer que f est bijective et déterminer f^{-1}.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}(f - Id) \oplus \mathrm{Ker}(f - 2Id) = E$.

Exercices supplémentaires

Exercice 1

Soit E un espace vectoriel et $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$.
Montrer que $E = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(g)$.

Exercice 2

Soient f, g, $h \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = h$, $g \circ h = f$, et $h \circ f = g$.
Montrer que f, g h ont même noyau et même image.

Exercice 3

Soient f_1, $f_2$et f_3 les applications réelles définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_1(x) = e^{-x}, \quad f_2(x) = (x+1)e^{-x}, \quad f_3(x) = (x^2-1)e^{(x}$$

Soit E l'espace vectoriel engendré par ces 3 applications.

1. Déterminer une base $\mathcal{B}$ de E, en déduire la dimension de E.
2. Soit D l'application d ´efinie sur E par : $\forall f \in E, D(f) = f'$.
3. Montrer que $D \in \mathcal{L}(E)$ et déterminer la matrice A de D dans la base $\mathcal{B}$.
4. Calculez A^n pour $n \geq 1$.
5. Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2+x+1)e^{-x}$. Calculer $f^{(n)}$.
6. Démontrer que D est un automorphisme de E. Déterminer D^{-1} et sa matrice relativement à la base $\mathcal{B}$.

Exercice 4

Soient $p, q \in \mathcal{L}(E)$. Montrer l'équivalence

$$p \circ q = p \quad \text{et} \quad q = p = q \quad \Longleftrightarrow p \text{ et } q \text{ sont des projecteurs de même noyau}$$