Etudiant 1 :

Cours : Fonction de répartition d'une VAR discrète. Propriétés.

Exercice 1 :
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de base $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$. On pose $\overrightarrow{u_1} = \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{u_3} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}$.
1. Montrer que $\mathcal{B}' = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$ est une base de E et déterminer les matrices de passage entre les deux bases.
2. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$.
Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 2 :
On considère une urne contenant une boule rouge, deux boules noires et trois boules jaunes. On effectue des tirages successifs sans remise jusqu'à ce qu'il ne reste plus dans l'urne que des boules de deux couleurs différentes. On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.
Déterminer la loi de X.

Etudiant 2 :

Cours : Formules de changement de base.

Exercice 1 : Soit $n \geq 2$. Une urne contient une boule portant le numéro 0, deux boules portant le numéro 1, 2^2 boules portant le numéro 2, ..., 2^n boules portant le numéro n.
On extrait une boule de l'urne, soit X le numéro de cette boule. Déterminer la loi de X.

Exercice 2 :

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
On pose $\overrightarrow{u_1} = (1, -1, 0)$, $\overrightarrow{u_2} = (1, 1, 0)$ et $\overrightarrow{u_3} = (0, 0, 1)$.
1. Montrer que $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer B la matrice de f dans cette base.
3. Calculer $f^n(\overrightarrow{v})$ où $\overrightarrow{v} = (2, -2, -1)$.

Etudiant 3 :

Cours :
Tout sur les projecteurs.

Exercice 1 :

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$ est une base de $\mathbb{R}^3$ où $\overrightarrow{a} = (0, 1, 1)$, $\overrightarrow{b} = (1, 1, 0)$, $\overrightarrow{c} = (1, 1, 1)$.
2. Ecrire la matrice de f dans la base $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$. En déduire A^n pour $n \geq 1$.

Exercice 2 :
On lance une pièce bien équilibrée jusqu'à obtenir face pour la 2ème fois. Soit X le nombre de lancers nécessaires.
Déterminer la loi de X.

Exercices supplémentaires

Exercice 1

Soient $p, q \in \mathcal{L}(E)$. Montrer l'équivalence

$$p \circ q = p \quad \text{et} \quad q = p = q \quad \Longleftrightarrow p \text{ et } q \text{ sont des projecteurs de même noyau}$$

Exercice 2

Soit E un ev de dimension 3, et f un endomorphisme de E tel que $f^2 \neq 0$ et $f^3 = 0$. Soit $\overrightarrow{x_0}$ tel que $f^2(\overrightarrow{x_0}) \neq \overrightarrow{0}$.

1. Montrer que $(\overrightarrow{x_0}, f(\overrightarrow{x_0}), f^2(\overrightarrow{x_0}))$ est une base de E et déterminer la matrice de f dans cette base.
2. Montrer que $\text{rg}(f) = 2$.
3. Montrer que l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec f est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ de base (Id_E, f, f^2).

Exercice 3

Soit $E = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \ / \ a + b = c + d = 0\}$ et $F = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \ / \ a = d = 0\}$.

1. Montrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^4$.
2. Déterminer l'image des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^4$ par la projection p sur E parallèlement à F.

Exercice 4

Un sac contient n jetons numérotés de 1 à n ($n \geq 3$). On tire trois jetons simultanément au hasard et on appelle X celle des trois valeurs obtenues qui se situe entre les deux autres. Déterminer la loi de X.

Exercice 5

Soit $n \geq 2$. U_1 et U_2 sont deux urnes contenant n boules numérotées de 1 à n. On tire une boule dans chaque urne et on appelle X le plus grand des deux numéros obtenus.

1. Déterminer la fonction de répartition de X.
2. En déduire la loi de X.