Etudiant 1 :

Cours : Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Exercice 1 :
Calculer $\displaystyle\int_{-\pi/5}^{\pi/5} \frac{\sin(\sin(\tan(x)))}{\ln(1+x^2)}dx$, $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{\ln(t)}{t}dt$, $\displaystyle\int_0^{\pi} x^2\sin(x)dx$.

Exercice 2 :
Soit f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{\ln(1+t^2)}$.
1. Montrer que f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Calculer f'.
2. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ (on pourra encadrer $f(x)$).

Exercice 3 :
Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ continue, non identiquement nulle, et telle que $\displaystyle\int_0^1 f = \int_0^1 f^2$. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) = 1$.

Etudiant 2 :

Cours : Loi faible des grands nombres.

Exercice 1 :
Calculer $\displaystyle\int_2^{2^n} \frac{dx}{x\ln(x)}$, $\displaystyle\int_0^1 (x^2+x+1)e^{-x}dx$ et $\displaystyle\int_{-1}^1 x^{2009}(x^2+1)^{2010}dx$

Exercice 2 :
On pose pour tout $n \geq 1$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n e^{-x}$.
1. Montrer que $\forall n \geq 1$, $|I_n| \leq \dfrac{1}{n+1}$. Qu'en déduit-on ?
2. Etablir une formule de récurrence entre I_n et I_{n+1}.
3. En déduire que pour $n \geq 1$, $0 \leq I_n - \dfrac{1}{(n+1)e} \leq \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$.
4. Trouver un équivalent simple de I_n.

Etudiant 3 :

Cours : Approximations d'une loi hypergéométrique, d'une loi binomiale.

Exercice 1 :
Calculer $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{(\tan(\sin(x)))^5}{\ln(1+x^2)}dx$, $\displaystyle\int_1^{e^2} (x^3+1)\ln(x)dx$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{1+x}{1+x^2}dx$

Exercice 2 :
Soit $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\exp(t)}{t}dt$.
1. Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, calculer sa dérivée et montrer que f peut se prolonger en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$.
2. Vérifier que $\ln(2) = \int_x^{2x} \frac{dt}{t}$ pour tout $x > 0$. En déduire $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.
3. Variations et convexité de f. Signe de $f(x)$ pour $x \in [0,+\infty[$.

Exercices supplémentaires

Exercice 1 : n personnes jettent simultanément une pièce de monnaie. Une personne gagne une partie si elle obtient le contraire de tous les autres. Soit X la variable égale au nombre de parties nécessaires pour l'obtention d'un vainqueur. Déterminer X et en déduire $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 2 : Soit X une variable suivant une loi de Poisson de paramètre λ. On définit la variable aléatoire Y par $Y = 0$ lorsque X prend une valeur impaire, et $Y = \dfrac{X}{2}$ sinon. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de Y.
(On pourra calculer $e^x + e^{-x}$ et $e^x - e^{-x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ pour essayer de simplifier les expressions)

Exercice 3 : Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant deux lois géométriques de même paramètre $p \in]0,1[$. Déterminer la loi de $X - Y$.