Etudiant 1 :

Cours : Conditions suffisantes, ou CNS de diagonalisabilité d'un endomorphisme.

Exercice 1 :
Calculer $\int_1^2 \frac{dt}{t(t^3+1)}$ en posant $u = t^3$.
(On fournit l'égalité suivante : $\frac{1}{X(X+1)} = \frac{1}{X} - \frac{1}{X+1}$.)

Exercice 2 :
Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de l'endomorphisme

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x_1, x_2, x_3) & \mapsto & (x_1 - x_2 - x_3, -x_1 + x_2 - x_3, -x_1 - x_2 + x_3) \end{array}$$

En déduire que f est diagonalisable et déterminer une base dans laquelle la matrice de f est diagonale. En déduire f^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Etudiant 2 :

Cours : Sommes de Riemann.

Exercice 1 :
Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de l'endomorphisme

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x_1, x_2, x_3) & \mapsto & (-2x_2, -2x_1, 2x_1 + 2x_2 + 2x_3) \end{array}$$

En déduire que f est diagonalisable et déterminer une base dans laquelle la matrice de f est diagonale. En déduire f^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2 :
Calculer $\int_0^{\ln(2)} \sqrt{e^x - 1}dx$, en posant $u = \sqrt{e^x - 1}$.

Etudiant 3 :

Cours : Définition valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres d'un endomorphisme.

Exercice 1 :
Calculer $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$, en posant $u = \sqrt{1+e^x}$.

Exercice 2 :
Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de l'endomorphisme

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x_1, x_2, x_3) & \mapsto & (5x_1 - 3x_2 - 3x_3, 6x_1 - 5x_2 - 6x_3, x_2 + 2x_3) \end{array}$$

En déduire que f est diagonalisable et déterminer une base dans laquelle la matrice de f est diagonale. En déduire f^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercices supplémentaires

Exercice 1 : Calculer $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}$ et $\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right)^{1/n}$.

Exercice 2 : Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. Pour $P \in E$, on définit $\varphi(P) = (X-1)P' - XP''$.
Vérifier que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$, et montrer que φ est diagonalisable.

Exercice 3 : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par $f(X) = AX$.
Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de f. f est-il diagonalisable ?