Etudiant 1 :

Cours : Conditions suffisantes, ou CNS de diagonalisabilité d'un endomorphisme.

Exercice 1 :
Soit $E = \mathbb{C}_n[X]$ et $\forall P \in E$, $f(P) = ((X+1)P)'$.
1. Montrer que $f \in \mathcal{L}(E)$.
2. Montrer que $1 \in \mathrm{Sp}(f)$ et déterminer l'espace propre associé.
3. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(f) \setminus \{1\}$ et P un vecteur propre associé.
   a. Montrer que -1 est une racine de P.
   b. Soit k l'ordre de -1 en tant que racine de P. Montrer que $k+1 = \lambda$ et factoriser explicitement P.
4. Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de f.
5. Démontrer que $\mathcal{B} = (1, 1+X, \ldots, (1+X)^n)$ est une base de E et déterminer la matrice de f dans cette base.

Exercice 2 : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par $f(X) = AX$. Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de f. f est-il diagonalisable ?

Etudiant 2 :

Cours : Ordre de multiplicité d'une racine. Définition et caractérisation.

Exercice 1 :
Soit $n \geq 1$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $\forall P \in E$,

$$f(P) = P(a) + XP'(a) + \frac{X^2}{2}P''(a) + X^3P'''(X)$$

1. Montrer que $f \in \mathcal{L}(P)$.
2. Déterminer $\mathrm{Sp}(f)$ et les dimensions des sous-espaces propres de f.
3. A quelles conditions sur a l'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Exercice 2 :
Soit $n \geq 1$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. On définit $\forall P \in E$, $f(P) = P'' - 2XP'$.
1. Montrer que $f \in \mathcal{L}(E)$.
2. Déterminer les valeurs propres de f. f est-il diagonalisable ?
3. Montrer que $\forall p \in \{0, \ldots, n\}$, il existe un unique polynôme unitaire $H_p \in E$ tel que $f(H_p) = -2pH_p$.
4. Déterminer le degré de H_p ainsi que les coefficients des termes de degré $p-1$ et $p-2$ de H_p.

Etudiant 3 :

Cours : Définition valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres d'un endomorphisme.

Exercice :
Soit $n \geq 2$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. A tout polynôme P de $\mathcal{R}_n[X]$, on associe le polynôme $T(P)$ défini par : $T(P)(X) = \sum_{k=0}^{n} P\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}X^k(1-X)^{n-k}$.
1. Montrer que $T \in \mathcal{L}(E)$.
2. Calculer $T(1)$ et $T(X)$.
3. Soit $P \in \mathcal{R}_{n-1}[X]$ et $Q(X) = XP(X)$. Montrer que

$$T(Q)(X) = \frac{X(1-X)}{n}(T(P))'(X) + X.T(P)(X)$$

4. Montrer que pour $0 \leq k \leq n$, $T(X^k)$ est un polynôme de degré k dont le coefficient dominant est $a_k = \dfrac{n!}{n^k(n-k)!}$.
5. T est-il diagonalisable ?

Exercices supplémentaires

Exercice 1 : Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. Pour $P \in E$, on définit $\varphi(P) = (X-1)P' - XP''$.
Vérifier que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$, et montrer que φ est diagonalisable.

Exercice 2 : Déterminer si le polynôme A est divisible par le polynôme B :

1. $A(X) = A^4 - 3X^2 + 5X - 3$ et $B(X) = -X + 1$
2. $A(X) = X^5 + 2X^4 + -2X^3 - 7X^2 - 8X - 4$ et $B(X) = X^2 + 3X + 2$.

Exercice 3 : Soit P un polynôme de degré $n \geq 1$ à coefficients réels. On suppose que P admet n racines réelles distinctes. Montrer que les racines de $P^2 + 1$ sont toutes simples dans $\mathbb{C}$.