Etudiant 1 :

Exercice 1 :

Déterminer un équivalent en 1^+ de $\dfrac{x^2 - x}{\ln(1+\sqrt{x^2-1})}$.

Exercice 2 :

Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \displaystyle\int_1^e (\ln t)^n \, dt$.

1. Calculer I_0, I_1 et établir une relation entre I_{n+1} et I_n $(n \geq 1)$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < I_n < \dfrac{e}{n+1}$.
3. Déterminer la limite de (I_n) et déterminer un équivalent de I_n.

Etudiant 2 :

Exercice 1 :

Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}}$.
Indication : on pourra commencer par un changement de variable $t = 1/u$.

Exercice 2 :

Etudier la convergence de la suite $(u_n)_n$ définie par :

$$u_n = \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)^2 \ldots \left(1+\frac{n}{n}\right)^n\right)^{1/n^2}$$

Etudiant 3 :

Exercice 1 :

Soit $\alpha > 0$. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\left((1+\alpha)^{1/x} - \alpha^{1/x}\right)$.

Exercice 2 :

Soit F la fonction numérique d'une variable réelle, définie par

$$F(x) = \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t} \, dt.$$

1. Quel est l'ensemble de définition de F ? Montrer que F est une fonction paire.
2. Déterminer les limites de F en $+\infty$ et en 0.
3. Montrer que F admet un prolongement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercices supplémentaires :

Exercice 1 :

Etudier la convergence de la suite $(u_n)_n$ définie par $\forall n \geq 1,\ u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k^2}$.

Exercice 2 :

On considère la suite $(I_n)_n$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} x^n \sin x \, dx$.
Etablir une formule de récurrence et déterminer I_n sous forme d'une somme.

Exercice 3 :

Déterminer la limite quand t tend vers 0^+ de $\dfrac{(1+t)^{\ln t/t} - t}{t(t^t - 1)}$.