Etudiant 1 :

Exercice 1 :
Déterminer la nature et la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\ln t}{(t^2+1)^2}dt$.
(On pourra faire (après l'avoir justifié) le changemet de variable $t = 1/u$.)

Exercice 2 :

Sous réserve d'existence, on pose $F(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt$.

1. Montrer que F est ainsi bien définie sur $\mathbb{R}^{*+}$.
2. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{*+}$ et calculer $F'(x)$ pour tout $x > 0$.
3. Déterminer les limites de F en 0^+ et en $+\infty$.
4. Montrer qu'aux voisinages de $+\infty$ et de 0, on a $F(x) = o\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
5. Sans chercher à calculer $F(x)$, montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} F(x)dx$ est bien définie et calculer cette intégrale.

Etudiant 2 :

Exercice 1 :

Déterminer si les intégrales impropres suivantes sont convergentes ou non et calculer leur valeur si possible.

$$\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t\ln(t)}, \qquad \int_1^{+\infty} \frac{dt}{(e^t-1)(e^{-t}-1)}$$

Exercice 2 :

1. Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)dt$ converge.
(On pourra montrer que $\ln(\sin t) \underset{0}{\sim} \ln(t)$).
2. Montrer que $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\cos t)dt$
3. Montrer que $2I = I - \dfrac{\pi}{2}\ln 2$ et en déduire la valeur de I.

Etudiant 3 :

Exercice 1 :

Déterminer l'existence et le calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}}dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}dt$.

Exercice 2 :

Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

1. Justifier que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b \frac{dt}{\sqrt{(t-a)(b-t)}}$ converge.
2. Calculer cette intégrale dans le cas $a = -1$ et $b = 1$.
3. Calculer cette intégrale pour $a < b$ quelconques.