Etudiant 1 :

Exercice 1 :
Déterminer selon les valeurs de $n \geq 1$ l'existence (et le calcul) de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^n} dt$.

Exercice 2 :

Sous réserve d'existence, on pose $F(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

1. Montrer que F est ainsi bien définie sur $\mathbb{R}^{*+}$.
2. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{*+}$ et calculer $F'(x)$ pour tout $x > 0$.
3. Déterminer les limites de F en 0^+ et en $+\infty$.
4. Montrer qu'aux voisinages de $+\infty$ et de 0, on a $F(x) = o\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
5. Sans chercher à calculer $F(x)$, montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} F(x)dx$ est bien définie et calculer cette intégrale.

Etudiant 2 :

Exercice 1 :

Déterminer si l'intégrale impropre suivante $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(e^t+1)(e^{-t}+1)}$ est convergente ou non et calculer sa valeur si possible.

Exercice 2 :

1. Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)dt$ converge.
   (On pourra montrer que $\ln(\sin t) \underset{0}{\sim} \ln(t)$).
2. Montrer que $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\cos t)dt$
3. Montrer que $2I = I - \dfrac{\pi}{2}\ln 2$ et en déduire la valeur de I.

Etudiant 3 :

Exercice 1 :

Déterminer la nature et la valeur des intégrales

$$\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t\ln(t)} \qquad \text{et} \int_0^{+\infty} \frac{t\ln t}{(t^2+1)^2} dt$$

Exercice 2 :

Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

1. Justifier que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b \frac{dt}{\sqrt{(t-a)(b-t)}}$ converge.
2. Calculer cette intégrale dans le cas $a = -1$ et $b = 1$.
3. Calculer cette intégrale pour $a < b$ quelconques.

Exercices supplémentaires :

Exercice 1 :

Soient α et β deux réels strictement positifs.

Soit pour tout $x \geq 0$, $f(x) = \dfrac{e^{-x/\beta} x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}$.

Montrer successivement que

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx, \qquad \int_0^{+\infty} xf(x)dx, \qquad \int_0^{+\infty} x^2 f(x)dx$$

convergent et déterminer leur valeur.