Etudiant 1 :

Exercice 1 :

Soient $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. On pose pour tout $x \geq 0$, $f(x) = \dfrac{e^{-x/\beta}x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}$.

Montrer successivement que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} xf(x)dx$ convergent et déterminer leur valeur.

Exercice 2 :

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dim.finie. Soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,E)$ tels que

$$f \circ g \circ f = f, \quad \text{et} \quad g \circ f \circ g = g$$

Montrer que $E = \mathrm{Im}(g) \oplus \mathrm{Ker}(f)$, puis comparer les rangs de f et g.

Etudiant 2 :

Exercice 1 :

Déterminer si l'intégrale impropre suivante $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(e^t+1)(e^{-t}+1)}$ est convergente ou non et calculer sa valeur si possible.

Exercice 2 :

Soient E un $\mathbb{K}$-ev et $f \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f^2 - 3f + 2Id_E = 0$.

1. Montrer que f est inversible et exprimer son inverse en fonction de f.
2. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f - Id_E) \oplus \mathrm{Ker}(f - 2Id_E)$.

Etudiant 3 :

Exercice 1 :

Soient $p, q \in \mathbb{R}$ tels que $p^2 - 4q < 0$. Calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^2+pt+q}$ après avoir vérifié sa convergence.

Exercice 2 :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que

$$f + g \text{ bijectif} \quad \text{et} \quad g \circ f = 0.$$

Montrer que $\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) = \dim(E)$.

Exercices supplémentaires :

Exercice 1 :
Soit E un $\mathbb{C}$-ev et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 = -f$. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

Exercice 2 :
Soient p et q deux projecteurs d'un ev E tels que $p \circ q = q \circ p$.
Montrer que $p \circ q$ est un projecteur, et déterminer son image et son noyau.

Exercice 3 :
Soient $p, q \in \mathcal{L}(E)$. Montrer l'équivalence suivante :

$$p \circ q = p \text{ et } q \circ p = q \iff p \text{ et } q \text{ sont des projecteurs de même noyau}$$