Etudiant 1 :

Exercice 1 :
Soit $n \geq 2$. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est donnée par : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Préciser le rang de cette matrice, puis déterminer une base de $\mathrm{Im}(u)$ et de $\mathrm{Ker}(u)$.
2. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de u. Cet endomorphisme est-il diagonalisable ?

Exercice 2 :
Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f^2 - 3f + 2Id_E = 0$.

1. Montrer que f est inversible et exprimer son inverse en fonction de f.
2. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f - Id_E) \oplus \mathrm{Ker}(f - 2Id_E)$.
3. f est-il diagonalisable ?

Etudiant 2 :

Exercice 1 :
Soit E un $\mathbb{C}$-ev de dimension 4 muni d'une base $\mathcal{B}$. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On note f l'endomorphisme dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est A.

1. Donner une base de $\mathrm{Im}(f)$ et de $\mathrm{Ker}(f)$.
2. Soit $y \in \mathrm{Im}(f)$ non nul. Montrer que y est un vecteur propre. Quelle est la valeur propre associée ?
3. Déterminer les valeurs propres de f.
4. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ? Si oui, donner une base de diagonalisation.
5. Diagonaliser B.

Exercice 2 :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dim.finie. Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f+g$ bijectif et $g \circ f = 0$.
Montrer que $\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) = \dim(E)$.

Etudiant 3 :

Exercice 1 :
Soit E un $\mathbb{C}$-ev et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 = -f$.
Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

Exercice 2 :
Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}$.

1. Trouver $P \in GL_2(\mathbb{R})$ et D diagonale tels que $D = P^{-1}AP$.
2. Soit B tel que $BA = AB$. Montrer que tout vecteur propre de A est vecteur propre de B. En déduire que $P^{-1}BP$ est diagonale dès que B commute avec A.
3. Trouver toutes les matrices M réels d'ordre 2 telles que $M^2 = A$.
4. Même question avec $A)I_2$, puis $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.