Etudiant 1 :

Exercice :
Soit $n \geq 1$. On note $E = \mathbb{R}_n[X]$ et on considère l'application $\varphi : E^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(P,Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt$$

1. Montrer que φ est bien définie, puis montrer que c'est un produit scalaire sur E. On pose $\|P\| = \sqrt{\varphi(P,P)}$.
2. Soit T le polynôme défini par $T(X) = 1 + \dfrac{X^n}{n!}$. Calculer $\|T\|$.
3. On pose $I = \frac{T}{\|T\|}$. On définit l'application θ qui, à tout polynôme P de E associe $2\varphi(P,I)I - P$.
   (a) Montrer que θ est un automorphisme de E et déterminer θ^{-1}.
   (b) Montrer que pour tout P de E, $\|\theta(P)\| = \|P\|$
   (c) Déterminer les valeurs propres possibles de θ.
   (d) θ est-il diagonalisable ?

Etudiant 2 :

Exercice 1 :
Soit $n \geq 2$. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est donnée par : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Préciser le rang de cette matrice, puis déterminer une base de $\mathrm{Im}(u)$ et de $\mathrm{Ker}(u)$.
2. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de u. Cet endomorphisme est-il diagonalisable ?

Exercice 2 :
Pour $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, on définit

$$\varphi(P,Q) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}P(t)Q(t)dt$$

Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

Etudiant 3 :

Exercice :
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, avec $a < b$.

1. Soient $a_1, \dots, a_n$ des entiers naturels deux à deux distincts. Montrer que la famille des fonctions $f_k : [a,b] \to \mathbb{R}$, définies par
$$f_k(x) = e^{a_k x}$$
pour $k \in \{1, \dots, n\}$ est libre dans l'espace $\mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R})$.
2. Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R})$, strictement positive. On pose pour tout $(i,j) \in \{1, \dots, n\}^2$,
$$a_{i,j} = \int_a^b e^{(i+j)t} f(t)dt$$
On note $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et on considère l'application $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par
$$\varphi(x,y) = {}^tXAY$$
où X et Y sont les matrices de coordonnées respectives de x et y dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

Exercices supplémentaires

Exercice 1

Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f^2 - 3f + 2Id_E = 0$.

1. Montrer que f est inversible et exprimer son inverse en fonction de f.
2. Montrer que $E = \operatorname{Ker}(f - Id_E) \oplus \operatorname{Ker}(f - 2Id_E)$.
3. f est-il diagonalisable ?

Exercice 2

Soit E un $\mathbb{C}$-ev et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 = -f$.
Montrer que $E = \operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Im}(f)$.

Exercice 3

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}$.

1. Trouver $P \in GL_2(\mathbb{R})$ et D diagonale tels que $D = P^{-1}AP$.
2. Soit B tel que $BA = AB$. Montrer que tout vecteur propre de A est vecteur propre de B. En déduire que $P^{-1}BP$ est diagonale dès que B commute avec A.
3. Trouver toutes les matrices M réels d'ordre 2 telles que $M^2 = A$.
4. Même question avec $A)I_2$, puis $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.