## Etudiant 1 :

**Exercice :**
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, avec $a < b$.

1. Soient $a_1, \dots, a_n$ des entiers naturels deux à deux distincts. Montrer que la famille des fonctions $f_k : [a,b] \to \mathbb{R}$, définies par
$$f_k(x) = e^{a_k x}$$
pour $k \in \{1, \dots, n\}$ est libre dans l'espace $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$.
2. Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$, strictement positive. On pose pour tout $(i,j) \in \{1,\dots,n\}^2$,
$$a_{i,j} = \int_a^b e^{(i+j)t} f(t)dt$$
On note $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et on considère l'application $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par
$$\varphi(x,y) = \ {}^tXAY$$
où $X$ et $Y$ sont les matrices de coordonnées respectives de $x$ et $y$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
Montrer que $\varphi$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

## Etudiant 2 :

**Exercice 1 :**
Pour $P, Q \in E = \mathbb{R}_2[X]$, on définit
$$\varphi(P,Q) = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2)$$

1. Montrer que $\varphi$ est un produit scalaire.
2. Soit $F = \{P \in E \ / \ P(0) = 0\}$. Montrer que $F$ est un sev de $E$ et donner une base de $F$.
3. Déterminer une base orthonormale de $F$ pour le produit scalaire $\varphi$.
4. Déterminer dimension et base de $G = \{P \in E \ / \ \forall Q \in F, \varphi(P,Q) = 0\}$.

---

**Exercice 2 :**
Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et $\mathcal{C} = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.
Montrer qu'il existe un unique produit scalaire $\varphi$ sur $\mathbb{R}^3$ dont on exprimera la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$, tel que $\mathcal{C}$ soit une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$.

## Etudiant 3 :

**Exercice :**
Soit $n \geq 1$. On note $E = \mathbb{R}_n[X]$ et on considère l'application $\varphi : E^2 \to \mathbb{R}$ définie par
$$\varphi(P,Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt$$

1. Montrer que $\varphi$ est bien définie, puis montrer que c'est un produit scalaire sur $E$. On pose $\|P\| = \sqrt{\varphi(P,P)}$.
2. Soit $T$ le polynôme défini par $T(X) = 1 + \dfrac{X^n}{n!}$. Calculer $\|T\|$.
3. On pose $I = \frac{T}{\|T\|}$. On définit l'application $\theta$ qui, à tout polynôme $P$ de $E$ associe $2\varphi(P,I)I - P$.
   (a) Montrer que $\theta$ est un automorphisme de $E$ et déterminer $\theta^{-1}$.
   (b) Montrer que pour tout $P$ de $E$, $\|\theta(P)\| = \|P\|$
   (c) Déterminer les valeurs propres possibles de $\theta$.
   (d) $\theta$ est-il diagonalisable ?

## Exercices supplémentaires

**Exercice 1**

Soient $E$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f^2 - 3f + 2Id_E = 0$.

1. Montrer que $f$ est inversible et exprimer son inverse en fonction de $f$.
2. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f - Id_E) \oplus \mathrm{Ker}(f - 2Id_E)$.
3. $f$ est-il diagonalisable ?

**Exercice 2**

On considère $\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire $< P|Q >= \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$.
Déterminer par le procédé de Gram-Schmidt l'orthonommalisée de la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire.

**Exercice 3**

Dans $\mathbb{R}^4$, déterminer une base orthonormale de $Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.