Etudiant 1 :

Exercice 1 :

Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la projection orthogonale sur le plan vectoriel d'équation $x+y-4z=0$.

Exercice 2 :

Soient $n \geq 1$ et $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$.
Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que les trois matrices A, B et $\alpha A + (1-\alpha)B$ soient orthogonales.
Montrer que $A = B$.

Etudiant 2 :

Exercice 1 :

Pour $P, Q \in E = \mathbb{R}_2[X]$, on définit

$$\varphi(P,Q) = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2)$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire.
2. Soit $F = \{P \in E \ / \ P(0) = 0\}$. Montrer que F est un sev de E et donner une base de F.
3. Déterminer une base orthonormale de F pour le produit scalaire φ.
4. Déterminer dimension et base de $F^{\perp}$.

Exercice 2 :

Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la projection orthogonale sur la droite vectorielle d'équations $x = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3}$.

Etudiant 3 :

Exercice 1 :

On considère $\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire $< P|Q >= \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$.
Déterminer par le procédé de Gram-Schmidt l'orthonormalisée de la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire.

Exercice 2 :

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté dans une base $\mathcal{B}$ par la matrice

$$A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Montrer que f est une projection orthogonale sur un sous-espace dont on précisera une équation.

Exercices supplémentaires

Exercice 1 : Dans $\mathbb{R}^4$, déterminer une base orthonormale de $Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

Exercice 2 : Calculer le minimum de la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (a,b) & \mapsto & \displaystyle\int_0^{\pi} (\sin x - (ax^2+bx))^2 dx \end{array}$.

Exercice 3 : Soit p un projecteur de E. Montrer que

$$p \quad \text{est un projecteur orthogonal} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x, y \in E, < p(x)|y >=< x|p(y) >$$