Etudiant 1 :

Exercice 1 :
Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. A est-elle diagonalisable ?
2. Déterminer une base orthonormale de vecteurs propres de A.
3. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2 :

Soient f et g deux endomorphismes d'un espace euclidien E qui commutent.
On suppose que les matrices S et T de f et g dans une base orthonormale vérifient

$$^tS = S \quad \text{et} \quad ^tT = -T$$

Montrer que, pour tout x de E, on a $f(x) \perp g(x)$ et $\|(f-g)(x)\| = \|(f+g)(x)\|$.

Etudiant 2 :

Exercice 1 :

Soit E un espace euclidien. Soit $u \in E \setminus \{0\}$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et

$$\forall x \in E,\ f(x) = x + \alpha < x, u > u$$

1. Montrer que f est un endomorphisme symétrique de E.
2. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de f. Etudier sa diagonalisabilité et retrouver le résultat de la question 1.
3. Déterminer en fonction de α et u dans quels cas f est une isométrie de E, c'est-à-dire, qui vérifie $\forall x \in E, \|f(x)\| = \|x\|$.
4. On se replace dans le cas général.
   (a) Exprimer f à l'aide d'un projecteur et en déduire un polynôme annulateur de f.
   (b) Etudier l'inversibilité de f, et, lorsqu'il existe, déterminer f^{-1}.

Exercice 2 :

Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la projection orthogonale sur le plan vectoriel d'équation $x + y - 4z = 0$.

Etudiant 3 :

Exercice 1 :

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté dans une base $\mathcal{B}$ par la matrice

$$A = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que f est une projection orthogonale sur un sous-espace dont on précisera une équation.
2. Diagonaliser f dans une base orthonormale.

Exercice 2 :

Soient $n \geq 1$ et $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.
Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que les trois matrices A, B et $\alpha A + (1-\alpha)B$ soient orthogonales.
Montrer que $A = B$.

Exercices supplémentaires

Exercice 1 :

Dans $\mathbb{R}^4$, déterminer une base orthonormale de $Vect\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$.

Exercice 2 :

Calculer le minimum de la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (a,b) & \mapsto & \displaystyle\int_0^{\pi} (\sin x - (ax^2+bx))^2 dx \end{array}$.

Exercice 3 :

Soit p un projecteur de E. Montrer que

$$p \quad \text{est un projecteur orthogonal} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x, y \in E, < p(x)|y >=< x|p(y) >$$

Exercice 4 :

Soient les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soient a et b les endomorphismes de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associés.

1. Les matrices A et B sont-elles diagonalisables ?
2. Calculer A^2 et B^2. En déduire les valeurs propres de A et B.
3. Déterminer les sous-espaces propres de A et B.
4. Montrer qu'il existe une base orthonormale de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle les matrices de a et b sont diagonales.