Etudiant 1 :

Exercice 1 :

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$.

Soit $a > 0$ avec $a \neq 1$. On pose $Y = \frac{a^X}{2n}$.
Déterminer la loi de Y et son espérance.

Exercice 2 :

Le nombre N de visiteurs quotidients d'un parc d'attraction suit une loi de Poisson de paramètre 10000. Ce parc a dix entrées $E_1, \ldots, E_{10}$ qui sont équiprobables. Soit X_i $(1 \leq i \leq 10)$ le nombre de visiteurs entrant par E_i en une journée donnée.

1. Déterminer la loi de X_i puis son espérance et sa variance.
2. Sachant qu'un visiteur sur 10 se débrouiller pour entrer sans payer, calculer le nombre moyen de visiteurs par jour qui payent et entrent par E_1.

Etudiant 2 :

Exercice 1 :

n personnes jettent simultanément une pièce de monnaie $(n > 2)$. Une personne gagne une partie si elle obtient le contraire de toutes les autres. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de parties nécessaires pour l'obtention d'un vainqueur. Déterminer X et en déduire $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 2 :

On remplace une carte quelconque (autre que l'as de pique) d'un jeu de 32 cartes par un deuxième as de pique. Soit n et p deux entiers strictement positifs.

1. On tire sans remise n cartes. Quelle est la probabilité de déceler la supercherie ?
2. On suppose $n = 4$. On recommence p fois le tirage de la question précédente, en remettant à chaque fois les 4 cartes tirées dans le jeu entre chaque tirage. Quel est le nombre d'expériences nécessaires pour déceler la supercherie avec une probabilité supérieure à 0.95 ?

Etudiant 3 :

Exercice 1 :

Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.
Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On pose $I_m = \inf(X, m)$. Déterminer la loi et l'espérance de I_m

Exercice 2 :

Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n. On tire une poignée aléatoire (éventuellement vide). On note Y le nombre de jetons, et X la somme des numéros obtenus. On suppose que Y suit une loi uniforme.

1. Préciser $X(\Omega)$.
2. Soit X_k la variable aléatoire égale à k si le jeton k est dans la poignée, et 0 sinon. Montrer que $\frac{X_k}{k}$ suit une loi de Bernoulli dont on précisera le paramètre.
3. Calculer $E(X)$.

Exercices supplémentaires

Exercice 1 :

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ strictement positif. Montrer que $\dfrac{1}{1+X}$ admet une espérance et la calculer.

Exercice 2 :

Un enfant a dans chacune de ses deux poches un paquet contenant N bonbons. Chaque fois qu'il veut manger un bonbon, il choisit, de manière indépendante et avec la probabilité p, la poche de gauche pour en prendre un.

1. Lorsqu'il ne trouve plus de bonbons dans la poche qu'il a choisie, quelle est la probabilité pour qu'il en reste k dans l'autre poche ?
2. Quelle est la probabilité pour qu'il n'y ait pas de bonbon dans les deux poches simultanément ?
3. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} 2^k \binom{2N-k}{N}$

Exercice 3 :

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre λ. Soit F_X sa fonction de répartition. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_X(n) = \frac{1}{n!}\int_{\lambda}^{+\infty} e^{-x} x^n \, dx$$