Etudiant 1 :

Exercice 1 :

On a un dé équilibré et une pièce donnant Face avec une probabilité $p \in]0,1[$.
On lance d'abord le dé : si on obtient le numéro $D = k$, on lance la pièce, jusqu'à ce qu'on obtienne Face pour la k-ième fois.
On note X le nombre de lancers nécessaires pour la pièce.
Calculer l'espérance de X.

Exercice 2 :

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$.

1. Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire X à densité, dont on déterminera une densité.
2. On pose $Y = \dfrac{e^X - 1}{e^X + 1}$.
   Déterminer la fonction de répartition et une densité de Y.

Etudiant 2 :

Exercice 1 :

La variable X suit une loi de Poisson de paramètre λ.
La variable aléatoire Y suit une loi de Poisson de paramètre X.
Déterminer la loi de Y puis l'espérance de Y.

Exercice 2 :

Soit f la fonction définie par $f(t) = 0$ si $t < 0$ et $f(t) = te^{-t}$ sinon.

1. Montrer que f est une densité de probabilité.
   Soit X une VAR de densité f.
2. Déterminer la loi de la VAR $Y = \lfloor X \rfloor$.
3. Déterminer la loi de la VAR $Z = X - Y$.

Etudiant 3 :

Exercice 1 :

Une urne contient des boules blanches en proportion $p \in]0,1[$, des boules noires en proportion $q = 1-p$. On effectue des tirages avec remise dans l'urne jusqu'à obtention de r boules blanches. Soit X le nombre de boules noires obtenues avant la r-ième boule blanche.

1. Déterminer la loi de X.
2. Montrer que l'on obtient presque sûrement r boules blanches.
3. Calculer $E(X)$.

Exercice 2 :

Soit pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{a}{x^2+1}$

1. Déterminer a pour que f soit une densité.
2. Déterminer une densité de e^X.
3. Déterminer une densité de X^2.

Exercices supplémentaires

Exercice 1 :

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ strictement positif. Montrer que $\dfrac{1}{1+X}$ admet une espérance et la calculer.

Exercice 2 :

Un enfant a dans chacune de ses deux poches un paquet contenant N bonbons. Chaque fois qu'il veut manger un bonbon, il choisit, de manière indépendante et avec la probabilité p, la poche de gauche pour en prendre un.

1. Lorsqu'il ne trouve plus de bonbons dans la poche qu'il a choisie, quelle est la probabilité pour qu'il en reste k dans l'autre poche ?
2. Quelle est la probabilité pour qu'il n'y ait pas de bonbon dans les deux poches simultanément ?
3. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} 2^k \binom{2N-k}{N}$

Exercice 3 :

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre λ. Soit F_X sa fonction de répartition. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_X(n) = \frac{1}{n!}\int_{\lambda}^{+\infty} e^{-x}x^n dx$$

Exercice 4 :

Soit f la fonction définie par $f(x) = 0$ si $x \leq 0$ et $f(x) = xe^{-x^2/2}$ si $x > 0$.

1. Montrer que f est une densité.
2. Soit X une variable aléatoire admettant f pour densité. Déterminer la fonction de répartition de X.
3. On pose $Y = X^2$. Déterminer la loi de Y.

Exercice 5 :

Soit U une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[0,1]$.

1. Soit $\lambda > 0$ et $X = \dfrac{-1}{\lambda}\ln(1-U)$. Déterminer la loi de X.
2. Soit $Y = \lfloor X \rfloor$. Déterminer la loi de Y.
3. Soit $Z = X - Y$. Déterminer loi de Z.