Etudiant 1 :

Exercice 1 : Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$.

1. (a) Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire X à densité, dont on déterminera une densité.
   (b) Montrer que X admet des moments d'ordre n pour tout $n \geq 1$.
2. On pose $Y = \dfrac{e^X - 1}{e^X + 1}$.
   (a) Déterminer la fonction de répartition et une densité de Y.
   (b) La variable aléatoire Y admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

Exercice 2 :

Soit f la fonction définie par $f(t) = 0$ si $t < 0$ et $f(t) = te^{-t}$ sinon.

1. Montrer que f est une densité de probabilité. Soit X une VAR de densité f.
2. Déterminer la loi des VAR $Y = \lfloor X \rfloor$ et $Z = X - Y$.

Etudiant 2 :

Exercice 1 :

Soit f la fonction définie par $f(x) = 0$ si $x \leq 0$ et $f(x) = xe^{-x^2/2}$ si $x > 0$.

1. Montrer que f est une densité.
2. Soit X une variable aléatoire admettant f pour densité. Déterminer la fonction de répartition de X.
3. On pose $Y = X^2$. Déterminer la loi de Y.

Exercice 2 : Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre 1.

1. Soit $t > 0$. Déterminer une densité de la variable $W_t = Y - tX$.
2. Déterminer, s'il existe, le moment d'ordre n (avec $n \geq 1$) de W_t.
3. En déduire une densité de la variable $Z = \dfrac{Y}{X}$.
4. Déterminer la loi de la variable $U = \dfrac{X}{X+Y}$.

Etudiant 3 :

Exercice 1 : Soit pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{a}{x^2+1}$

1. Déterminer a pour que f soit une densité.
2. Déterminer une densité de $Y = e^X$ et une densité de $Z = X^2$.

Exercice 2 : Soit U une variable aléatoire réelle suivant la loi uniforme sur $[0, 1[$.
Soit $\lambda > 0$. On considère les variables aléatoires suivantes :

$$V = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-U), \quad W = \lfloor V \rfloor, \quad Y = V - W, \quad Z = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-Y)$$

1. Déterminer les lois de V et W.
2. Déterminer une densité de Y ainsi que son espérance.
3. Déterminer une densité de Z.
4. On considère la variable aléatoire $X = \min(1, V)$.
   Déterminer la fonction de répartition de X.