Etudiant 1 :

Exercice 1 :
Soit X une variable suivant une loi $\gamma\left(\frac{1}{2}\right)$, $Y=\sqrt{X}$ et B une variable discrète prenant uniformément ses valeurs dans $\{-1,1\}$, indépendante de X.

1. Déterminer une densité de Y.
2. Déterminer une densité de $Z=BY$. Reconnaître la loi de Z et donner sans calcul son espérance et sa variance.
3. Donner plus généralement une densité de Z lorsque X suit une loi $\Gamma(b,\nu)$, où $(b,\nu)\in(\mathbb{R}^{*+})^2$. Comment choisir b et ν pour que Z suive une loi normale centrée réduite ?

Exercice 2 :

Soit X_n suivant une loi $\mathcal{N}(m,n\sigma^2)$. La suite (X_n) converge-t-elle en loi ?
Même question pour X_n qui suit une loi $\mathcal{P}(n\lambda)$.

Etudiant 2 :

Exercice :

Soient $X_1,X_2,\ldots,X_n$, n variables aléatoires indépendantes suivant la même loi exponentielle de paramètre 1. On pose $\overline{X_n}=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}X_i$ et $X_n^*=\sqrt{n}\left(\overline{X_n}-1\right)$.

1. Donner l'espérance et la variance de $\overline{X_n}$.
2. On note F_n la fonction de répartition de X_n^*.
   (a) Déterminer pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\infty}F_n(x)$.
   (b) Calculer une valeur approchée de $P\left(1-\dfrac{2}{\sqrt{n}}\leq\overline{X_n}\leq 1+\dfrac{2}{\sqrt{n}}\right)$ pour n assez grand. *(Si Φ est la fonction de répartition d'une loi normale réduite, on donne $\Phi(2)\simeq 0,977$).*
3. (a) Quelle est la loi de $Y_n=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$. En donner une densité g_n.
   (b) En déduire une densité h_n de $\overline{X_n}$ et une densité f_n de X_n^*.
4. On admet que $n!\sim n^ne^{-n}\sqrt{2\pi n}$. Déterminer pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\infty}f_n(x)$.

Etudiant 3 :

Exercice 1 :

1. On considère la fonction f_X définie par $f_X(x)=\mathbf{1}_{\mathbb{R}^{*+}}(x)\frac{1}{x\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\ln x-1)^2}$.
   (a) Montrer que f_X est une densité et exprimer la fonction de répartition de X à l'aide de la fonction de répartition Φ d'une loi normale centrée réduite.
   (b) Calculer $E(X)$ et $V(X)$.
2. Soit Y suivant une loi $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$. On pose $X=e^Y$.
   (a) Déterminer une densité de X. On note $X\rightsquigarrow\mathcal{LN}(m,\sigma^2)$.
   (b) Calculer $E(X)$ et $V(X)$.
3. (a) Soit $X\rightsquigarrow\mathcal{LN}(m,\sigma^2)$. Soit $(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$. Quelle est la loi suivie par $Z=aX^b$?
   (b) Donner l'espérance et la variance de Z.

Exercice 2 :
Soit X suivant une loi exponentielle de paramètre 1. On note pour tout $n\geq 1$, $Y_n=e^{-X+\frac{1}{n}}$ et $Y=e^{-X}$. Montrer que Y_n converge en loi vers Y.