Etudiant 1 :

Exercice 1 :
Etudier la continuité des fonctions $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définies par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases},$$

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\sin(y) - y\sin(x)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Exercice 2 :

Soit X_n suivant une loi $\mathcal{N}(m, n\sigma^2)$. La suite (X_n) converge-t-elle en loi ?
Même question pour X_n qui suit une loi $\mathcal{P}(n\lambda)$.

Etudiant 2 :

Exercice 1 :

Soit X suivant une loi exponentielle de paramètre 1.
On note pour tout $n \geq 1$, $Y_n = e^{-X+\frac{1}{n}}$ et $Y = e^{-X}$.
1. Montrer que Y est une variable à densité et déterminer sa loi.
2. Montrer que Y_n converge en loi vers Y.

Exercice 2 :

Etudier la continuité des fonctions $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définies par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x + y} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases},$$

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{xy} - 1}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Etudiant 3 :

Exercice 1 :
Etudier la continuité des fonctions $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définies par :

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\ln(x^2 + y^2) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases},$$

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(xy)}{|x| + |y|} & \text{si } (x,y) \neq 0 \\ 1 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Exercice 2 :
Soit $(X_n)_n$ une suite de VAR de Bernoulli indépendantes de paramètre p.
On pose pour $n \geq 1$, $Y_n = X_n X_{n+1}$.
1. Préciser la loi de Y_n.
2. Démontrer que $S_n = \dfrac{Y_1 + \ldots + Y_n}{n}$ converge en probabilité vers la variable certaine p^2.

Exercices supplémentaires

Exercice 1
On considère la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \dfrac{x+y}{x^2+y^2} \end{array}$$

1. Justifier que f est bornée sur $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 3x+y \leq 6, x-y \leq 2, x \geq 1\}$.
2. On note $\partial\Delta$ le bord de Δ.
   (a) Préciser un système d'équations définissant $\partial\Delta$.
   (b) Justifier que f admet un minimum et un maximum sur $\partial\Delta$.
   (c) Déterminer $\min\limits_{\partial\Delta} f$ et $\max\limits_{\partial\Delta} f$ et préciser les points $\partial\Delta$ où ils sont atteints.

Exercice 2

même exercice avec $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$ et $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x \leq 4, y \leq 3, x+y \geq 2\}$.

Exercice 3 On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique. Soit $A \in \mathbb{R}^n$. On pose

$$\forall X \in \mathbb{R}^n, \quad f(X) = \frac{\text{Arctan}\,(< A, X >)}{1 + \|X\|^2}$$

Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 4

1. Montrer que la fonction $f : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_1^2 + \cdots + x_n^2$ admet n pour minimum sur l'hyperplan d'équation $x_1 + \cdots + x_n = n$.
2. Déterminer le minimum de la somme des puissances n-ièmes de deux nombres réels strictement positifs dont la somme vaut n.

Exercice 5

Soit $(X_n)_n$ une suite de VARD deux à deux indépendantes possédant toutes une espérance et une variance. On suppose que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{E(X_1) + \cdots + E(X_n)}{n} = M \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{V(X_1) + \cdots + V(X_n)}{n^2} = 0$$

Montrer que $S_n = \dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à M.

Exercice 6

Combien de fois suffit-il de lancer une pièce de monnaie équilibrée pour être sûr d'avoir au moins 99% de chances d'obtenir autant de piles que de faces à 1% près ?