Etudiant 1 :

Exercice 1 :

1. On considère la fonction $f : (x, y) \mapsto x^2y$. Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$.
2. Soient les fonctions suivantes : $u(t) = \ln(t)$, $v(t) = \dfrac{1}{t}$, $g = u \circ f$, $h(x, t) = f(x, v(t))$, $k(t) = f(u(t), v(t))$. Calculer :
   - les dérivées partielles de g par rapport à x et y en (x, y)
   - les dérivées partielles de h par rapport à x et t en (x, t)
   - la dérivée $k'(t)$.

Exercice 2 :

Soit X_n suivant une loi $\mathcal{P}(n\lambda)$. La suite (X_n) converge-t-elle en loi ?
Même question pour X_n qui suit une loi $\mathcal{N}(m, n\sigma^2)$.

Etudiant 2 :

Exercice 1 :

Soit X suivant une loi exponentielle de paramètre 1.
On note pour tout $n \geq 1$, $Y_n = e^{-X+\frac{1}{n}}$ et $Y = e^{-X}$.
1. Montrer que Y est une variable à densité et déterminer sa loi.
2. Montrer que Y_n converge en loi vers Y.

Exercice 2 :

1. Soit f la fonction définie par $f(x, y) = x^y$. Sur quel ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ la fonction f est-elle définie ? Calculer le gradient de f en A, pour $A \in \Omega$.
2. Soit $n \geq 1$. On définit pour tout $t > 0$, $u(t) = t^n$ et $v(t) = \ln(t)$. On définies les fonctions suivantes : $g(x, y) = v(f(x, y))$, $h(t, y) = f(u(t), y)$, $j(x, t) = f(x, v(t))$ et $k(t) = f(u(t), v(t))$. Calculer les dérivées partielles par rapport à x et y de la fonction g en $(x, y) \in \Omega$, puis celles de h, j et k par rapport à la variable t, pour $x > 0, y \in \mathbb{R}$ et $t > 0$.
3. Calculer la dérivée directionnelle $f_U(A)$ lorsque $A = (2, 1)$, $U = (1, 2)$.

Etudiant 3 :

Exercice 1 :
On pose $f(0, 0) = g(0, 0) = 0$ et pour $(x, y) \neq (0, 0)$, on définit

$$f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad g(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

1. Montrer que f est continue en $(0, 0)$ et que g n'est pas continue en $(0, 0)$
2. Calculer les gradients de f et de g en $A = (x_0, y_0) \neq (0, 0)$. Peut-on les calculer en $(0, 0)$?
3. Peut-on calculer une dérivée directionnelle $f'_U(O)$ ou $g'_U(O)$ lorsque $O = (0, 0)$ et $U(\alpha, \beta)$?
4. Sur quelle partie de $\mathbb{R}^2$, les fonctions f et g sont-elles de classe $\mathcal{C}^1$?

Exercice 2 :
Soit $(X_n)_n$ une suite de VAR de Bernoulli indépendantes de paramètre p.
On pose pour $n \geq 1$, $Y_n = X_nX_{n+1}$.
1. Préciser la loi de Y_n.
2. Démontrer que $S_n = \dfrac{Y_1 + \ldots + Y_n}{n}$ converge en probabilité vers la variable certaine p^2. La suite (S_n) converge-t-elle en loi ?

Exercices supplémentaires

Exercice 1
On considère la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \dfrac{x+y}{x^2+y^2} \end{array}$$

1. Justifier que f est bornée sur $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 3x+y \leq 6, x-y \leq 2, x \geq 1\}$.
2. On note $\partial\Delta$ le bord de Δ.
   (a) Préciser un système d'équations définissant $\partial\Delta$.
   (b) Justifier que f admet un minimum et un maximum sur $\partial\Delta$.
   (c) Déterminer $\min\limits_{\partial\Delta} f$ et $\max\limits_{\partial\Delta} f$ et préciser les points $\partial\Delta$ où ils sont atteints.

Exercice 2

même exercice avec $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$ et $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x \leq 4, y \leq 3, x+y \geq 2\}$.

Exercice 3 On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique. Soit $A \in \mathbb{R}^n$. On pose

$$\forall X \in \mathbb{R}^n, \quad f(X) = \frac{\text{Arctan}\,(< A, X >)}{1 + \|X\|^2}$$

Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 4

1. Montrer que la fonction $f : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_1^2 + \cdots + x_n^2$ admet n pour minimum sur l'hyperplan d'équation $x_1 + \cdots + x_n = n$.
2. Déterminer le minimum de la somme des puissances n-ièmes de deux nombres réels strictement positifs dont la somme vaut n.

Exercice 5

Soit $(X_n)_n$ une suite de VARD deux à deux indépendantes possédant toutes une espérance et une variance. On suppose que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{E(X_1) + \cdots + E(X_n)}{n} = M \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{V(X_1) + \cdots + V(X_n)}{n^2} = 0$$

Montrer que $S_n = \dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à M.

Exercice 6

Combien de fois suffit-il de lancer une pièce de monnaie équilibrée pour être sûr d'avoir au moins 99% de chances d'obtenir autant de piles que de faces à 1% près ?

Exercice 7

On considère la fonction f définie par $f(x,y) = 2x^2y - xy^2$. On considère le point $A(1,0)$ et le point $B = (3,4)$. On peut poser $H = B - A$. Déterminer un point $C = A + \theta H$ du segment $[AB]$ tel que

$$f(B) - f(A) = < \nabla f_C, B - A > = < \nabla f_{A+\theta H}, H >$$