Etudiant 1 :

Exercice 1 :
On pose $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f_n(x,y) = (x^n - y)e^{x-y}$

1. Justifier que f_n est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. Déterminer le gradient de f_n en tout point.
2. On suppose $n = 2$. Déterminer les points critiques de f_2, la Hessienne en ces points, et déterminer les extremums de f_2.
3. On suppose $n = 1$. Montrer qu'il existe une infinité de points en lesquels le gradient de f_1 s'annule et que ces points sont des minimums pour f_1.

Exercice 2 :

Soit $f(x,y) = (x^2+y^2)^2 \sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.
Montrer que f possède un DL d'ordre 2 au voisinage de $O = (0,0)$ mais que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(O)$ n'existe pas.

Etudiant 2 :

Exercice 1 :

On pose $f(x,y) = \dfrac{xy^3}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.
Montrer que f possède des dérivées partielles d'ordre 2 en $O = (0,0)$ mais n'admet pas de DL d'ordre 2 au voisinage de O.

Exercice 2 :

Soit A une matrice symétrique telle que $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}^{+*}$. $B \in \mathbb{R}^2$. On pose $\forall X \in \mathbb{R}^n,\ f(X) = \dfrac{1}{2}\,{}^tXAX - {}^tBX = \dfrac{1}{2} < AX, X > - < B, X >$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$.
2. Soit $X_1 \in \mathbb{R}^n$. Montrer que $\forall H \in \mathbb{R}^n,\ f(X_1+H) = f(X_1) + < AX_1 - B, H > + \dfrac{1}{2} < AH, H >$.
3. En déduire le DL d'ordre 1 de f au voisinage de X_1 et $\nabla f(X_1)$.
4. Montrer que f possède un unique point critique et qu'en ce point f possède un minimum global.

Etudiant 3 :

Exercice 1 :
On pose $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z) = x^3 + 2xy + y^3 - z^3 + 2xz$.

1. Montrer que f admet un DL d'ordre 2 en tout point de $\mathbb{R}^3$.
2. Ecrire la Hessienne de f en $A = (1,1,1)$ et le DL d'ordre 2 de f au voisinage de A.

Exercice 2 :
Soit f définie sur $]0,+\infty[^2$ par $f(x,y) = \dfrac{x^2+xy+\sqrt{y}}{x\sqrt{y}}$.

1. Montrer que f est continue et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[^2$.
2. Déterminer les points critiques de f et leur nature.
3. La fonction f est-elle majorée sur $]0,+\infty[^2$?
4. Montrer que $\forall (a,b,c) \in]0,+\infty[^3,\ \dfrac{a+b+c}{3} \geq (abc)^{1/3}$.
5. Montrer que f admet un minimum global sur $]0,+\infty[^2$ que l'on calculera.
6. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ l'inéquation $e^{2x} + e^y \leq e^{x+y}(3 - e^y)$.

Exercices supplémentaires

Exercice 1
On considère la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \dfrac{x+y}{x^2+y^2} \end{array}$$

1. Justifier que f est bornée sur $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 3x+y \leq 6, x-y \leq 2, x \geq 1\}$.
2. On note $\partial\Delta$ le bord de Δ.
   (a) Préciser un système d'équations définissant $\partial\Delta$.
   (b) Justifier que f admet un minimum et un maximum sur $\partial\Delta$.
   (c) Déterminer $\min\limits_{\partial\Delta} f$ et $\max\limits_{\partial\Delta} f$ et préciser les points $\partial\Delta$ où ils sont atteints.

Exercice 2

même exercice avec $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$ et $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x \leq 4, y \leq 3, x+y \geq 2\}$.

Exercice 3 On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique. Soit $A \in \mathbb{R}^n$. On pose

$$\forall X \in \mathbb{R}^n, \quad f(X) = \frac{\mathrm{Arctan}\,(< A, X >)}{1 + \|X\|^2}$$

Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 4

1. Montrer que la fonction $f : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_1^2 + \cdots + x_n^2$ admet n pour minimum sur l'hyperplan d'équation $x_1 + \cdots + x_n = n$.
2. Déterminer le minimum de la somme des puissances n-ièmes de deux nombres réels strictement positifs dont la somme vaut n.

Exercice 5

On considère la fonction f définie par $f(x,y) = 2x^2y - xy^2$. On considère le point $A(1,0)$ et le point $B = (3,4)$. On peut poser $H = B - A$. Déterminer un point $C = A + \theta H$ du segment $[AB]$ tel que

$$f(B) - f(A) = < \nabla f_C, B - A > = < \nabla f_{A+\theta H}, H >$$

Exercice 6