Etudiant 1 :

Exercice 1 :
Soit A une matrice symétrique telle que $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}^{+*}$. $B \in \mathbb{R}^2$. On pose $\forall X \in \mathbb{R}^n,\ f(X) = \frac{1}{2}\,{}^tXAX - {}^tBX = \frac{1}{2} < AX, X > - < B, X >$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$.
2. Soit $X_1 \in \mathbb{R}^n$. Montrer que
   $\forall H \in \mathbb{R}^n,\ f(X_1 + H) = f(X_1) + < AX_1 - B, H > + \frac{1}{2} < AH, H >$.
3. En déduire le DL d'ordre 1 de f au voisinage de X_1 et $\nabla f(X_1)$.
4. Montrer que f possède un unique point critique et qu'en ce point f possède un minimum global.

Exercice 2 :

Soient U, V et W trois variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ indépendantes, ayant même loi, d'espérance $m \neq 0$ et de variance $\sigma^2 \neq 0$.
Déterminer x, y et z dans $\mathbb{R}$ pour que la variable $T = xU + yV + zW$ ait pour espérance m et une variance minimale.

Etudiant 2 :

Exercice :

Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $F(x,y) = 3x^4 - 4x^2y + y^2$.

1. (a) Justifier que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
   (b) Déterminer $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ F(x,y) = 0\}$.
   (c) Etudier le signe de $F(x,y)$ et représenter graphiquement l'ensemble $\mathcal{P}$ (respectivement $\mathcal{N}$ des points M du plan de coordonnées (x,y) vérifiant $F(x,y) \geq 0$ (resp. $F(x,y) \leq 0$).
   (d) La fonction F admet-elle des extremums locaux ? globaux ?
   (e) Montrer que la restriction de F à toute droite passant par l'origine $0 = (0,0)$ admet un minimum strict en 0.
2. (a) Montrer qu'il existe deux réels α et β tels que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus D$,
   $$\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)}{F(x,y)} = \frac{\alpha}{y - x^2} + \frac{\beta}{y - 3x^2}$$
   (b) Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer les intervalles I de $\mathbb{R}$ et les fonctions g d'une variable réelle, définies et dérivables sur I, telles que, pour tout $t \in I$, $F(a,t)g'(t) = \frac{\partial F}{\partial t}(a,t)g(t)$. Y a-t-il des solutions sur $I = \mathbb{R}$?

Etudiant 3 :

Exercice :
Soit $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Dans cette question $n = 3$ et $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.
   (a) Déterminer $\mathrm{Ker}(A)$.
   (b) Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(X) = {}^tXAX$. Justifier que f est positive sur $\mathbb{R}^3$ et déterminer ses extremums globaux.
2. On revient au cas général. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) =< Ax, x >$.
   (a) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et écrire la formule de Taylor à l'ordre 1 en $x \in \mathbb{R}^n$.
   (b) Montrer que $\forall x, u \in \mathbb{R}^n$, $< Au, x >=< {}^tAx, u >$. En déduire que
   $$f(x + u) = f(x)+ < (A + {}^tA)x, u > + < Au, u >$$
   (c) Justifier que $S = \{u \in \mathbb{R}^n \text{ tels que } \|u\| = 1\}$ est un fermé borné de $\mathbb{R}^n$. En déduire l'existence d'une fonction $\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continue en 0 telle que $\varepsilon(0) = 0$ et $\forall u \in \mathbb{R}^n$, $< Au, u >= \|u\|\varepsilon(u)$.
   (d) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\nabla f(x) = (A + {}^tA)x$.
   (e) On suppose que A et symétrique et $\forall x \in \mathbb{R}^n, < Ax, x >\geq 0$. Montrer quee
   $$\{x \in \mathbb{R}^n, f(x) = 0\} \subset \{x \in \mathbb{R}^n, \nabla f(x) = 0\}$$
   puis que
   $$\{x \in \mathbb{R}^n, f(x) = 0\} = \mathrm{Ker}(A)$$
   Que dire des extremums de f ?

Exercices supplémentaires

Exercice 1

Soient a, b et c sont trois réels tels que $0 < a \leq b \leq c$.

$$\forall X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ f(X) = ax^2 + by^2 + cz^2$$

Trouver le maximum et le minimum de f sur $D = \{(x, y, z) \in (\mathbb{R}^+)^3 \ / \ x + y + z = 1\}$.

Exercice 2

Etudier les extremums de la fonction $f(x, y, z) = x - y + z^2$, puis les extremums sous la contrainte $x - e^y - z = 0$.