Etudiant 1 :

Exercice 1 :

Déterminer la nature (et la somme si possible) de la série de terme général

$$u_n = \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

Exercice 2 :

Soit $(u_n)_n$ une suite de réels strictement positifs.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$.
Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Etudiant 2 :

Exercice 1 :

On donne : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$ converge et déterminer sa somme.

Exercice 2 :

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$.
Montrer que (u_n) converge vers un réel ℓ.
Quelle est la nature de la série de terme général $u_n - \ell$?

Etudiant 3 :

Exercice 1 :

Nature et somme de la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{(n+1)4^n}$$

Exercice 2 :

Soient $(a_n)_n$ une suite positive et (u_n) la suite définie par $u_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = u_n + \frac{a_n}{u_n}.$$

Montrer que la suite (u_n) est convergente si et seulement si la série de terme général a_n est convergente.

Exercices supplémentaires :

Exercice 1 : Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in]0,1[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - u_n^2$. Déterminer l'existence et éventuellement le calcul de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \ln(1-u_n)$.

Exercice 2 : Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.