Etudiant 1 :

Exercice :

On considère un jeu à deux issues : s (succès) et e (échec). On suppose que la probabilité d'un succès est $p \in]0,1[$. On répète ce jeu jusqu'à obtenir pour la première fois au moins un succès et au moins un échec ; on note alors T le nombre de réalisations réalisées, S le nombre de succès et E le nombre d'échecs au moment de l'arrêt.

1. (a) Déterminer la loi de T.
   (b) Montrer que T admet une espérance et une variance et les calculer.
2. (a) Donner la loi conjointe du couple (S, T).
   (b) En déduire la loi de S.
   (c) Montrer que S possède une espérance et une variance et les calculer.
   (d) Justifier que le couple (S, T) admet une covariance puis la calculer.
3. Montrer que le couple (S, E) admet une covariance et la calculer.

Etudiant 2 :

Exercice :

Soient $2 \leq k \leq n$. Une urne contient n boules indiscernables au toucher, numérotées de 1 à n. Un joueur tire en une seule fois k boules de l'urne. Soient X_1 et X_k les V.A. respectivement égales au plus petit et au plus grand numéro tiré.

1. Dans cette question, $k = 2$.
   (a) Déterminer la loi de X_1 et calculer son espérance.
   (b) Déterminer la loi de X_2, comparer X_1 et $n + 1 - X_2$, puis calculer $\mathbb{E}(X_2)$.
2. On revient au cas général $2 \leq k \leq n$.
   (a) Déterminer la loi de X_1.
   (b) Le joueur note les numéros des boules sorties et range ces nombres dans l'ordre croissant $x_1 < x_2 < \ldots < x_k$. Pour $1 \leq k \leq k$, soit X_j la variable aléatoire égale au j-ième numéro x_j, et on pose :
   $$D_1 = X_1,\ D_2 = X_2 - X_1, \ldots, D_k = X - k - X_{k-1},\ D_{k+1} = n + 1 - X_k.$$
   Préciser la loi du vecteur $(D_1, D_2, \ldots, D_{k+1})$ et expliquer pourquoi les variables $D_1, \ldots D_{k+1}$ suivent toutes la même loi.
   (c) En déduire les espérances de X_1 et de X_k puis la formule :
   $$\sum_{i=1}^{n-k+1} i \binom{n-1}{k-1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Etudiant 3 :

Exercice 1 :

Soit X une variable aléatoire suivant une loi géometrique de paramètre $p \in]0,1[$. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On pose $I_m = \inf(X, m)$ et $S_m = \sup(X, m)$. Déterminer la loi et l'espérance de I_m puis de S_m.

Exercice 2 :

Un péage autoroutier comporte m guichets. On suppose que le nombre N de voitures arrivant en 1 heure suit une loi de Poisson de paramètre λ. On suppose, de plus, que les conducteurs choisissent au hasard leur guichet et que ces choix sont indépendants. Soit X_i $(1 \leq i \leq m)$ le nombre de voitures passant au guichet numéro i en 1 heure.

1. Calculer $P(X_i = k \mid N = n)$ pour tout couple (k, n) d'entiers naturels.
2. En déduire la loi de X_i puis son espérance et sa variance.