Etudiant 1 :

Exercice 1 :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $f \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f^2 - 3f + 2Id_E = 0$.

1. Montrer que f est inversible et exprimer son inverse en fonction de f.
2. Montrer que $E = \text{Ker}(f - Id_E) \oplus \text{Ker}(f - 2Id_E)$.

Exercice 2 :

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ défini par $f(x, y, z) = (x, y + z, y + z)$.
Montrer que $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2)$, $\text{Im}(f) = \text{Im}(f^2)$, puis que $\text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f) = \mathbb{R}^3$.

Etudiant 2 :

Exercice 1 :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 = f$.
Montrer que $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$.

Exercice 2 :

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ défini par :

$$f(x, y, z, t) = (x + y + z + 3t, 3x + 3y + 3t, -4x + 7y + z, 3x + 14y - z + 3t)$$

Déterminer (dans l'ordre de votre choix) le rang de f, une base de $\text{Im}(f)$, une base de $\text{Ker}(f)$.

Etudiant 3 :

Exercice :

Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie $n \geq 2$ et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. On suppose dans cette question que $\text{rg}(f) = \text{rg}(f^2) = r$.
   (a) Montrer que $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2)$ et que $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$.
   (b) Réciproquement, on suppose que $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$. Montrer que $\text{rg}(f) = \text{rg}(f^2)$.
2. On suppose désormais que $\text{rg}(f) = r$, $\text{rg}(f^2) = p$, avec $r \neq p$.
   (a) Montrer que $p \leq r - 1$.
   (b) Exprimer $\dim(\text{Ker} f \cap \text{im} f)$ en fonction de r et p.
3. (a) Montrer qu'il existe un entier k tel que $\text{rg}(f^k) = \text{rg}(f^{k+1})$.
   (b) Montrer qu'on a alors $E = \text{Ker}(f^k) \oplus \text{Im}(f^k)$.