Etudiant 1 :

Exercice 1 :

Déterminer si l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{(e^t+1)(e^{-t}+1)}$ converge ou non et calculer sa valeur si possible.

Exercice 2 :

Sous réserve d'existence, on pose $F(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

1. Montrer que F est ainsi bien définie sur $\mathbb{R}^{*+}$.
2. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{*+}$ et calculer $F'(x)$ pour tout $x > 0$.
3. Déterminer les limites de F en 0^+ et en $+\infty$.
4. Montrer qu'aux voisinages de $+\infty$ et de 0, on a $F(x) = o\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
5. Sans chercher à calculer $F(x)$, montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} F(x)dx$ est bien définie et calculer cette intégrale.

Etudiant 2 :

Exercice 1 :

Déterminer si l'intervalle $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} dt$ converge et déterminer sa valeur si possible.

Exercice 2 :

On pose, sous réserve d'existence, $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t+2)}{t^2+x} dt$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$ (on pourra faire le changement de variables $u = \dfrac{t}{\sqrt{x}}$.
3. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x)$.

Etudiant 3 :

Exercice 1 :

Déterminer si l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$ converge et calculer sa valeur si possible.

Exercice 2 :

On pose pour $x \in]0,1[$, $f(x) = \dfrac{x^2\ln(x)}{x^2-1}$.

1. Vérifier que la fonction f est bornée.
2. Démontrer que pour tout entier n,
$$\int_0^1 f(x)dx = -\sum_{k=1}^{n} \int_0^1 x^{2k}\ln(x)dx + \int_0^1 x^{2n} f(x)dx$$
(après avoir contrôlé la convergence de toutes ces intégrales).
3. Calculer $\displaystyle\int_0^1 x^{2k}\ln(x)dx$. Montrer que la suite $\left(\displaystyle\int_0^1 x^n f(x)dx\right)$ converge vers 0.
4. En déduire que $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = -1 + \frac{\pi^2}{8}$ en utilisant la somme de la série $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.