

Etudiant 1 :

Exercice :

Soit E un \mathbb{C} -ev de dimension 4 muni d'une base \mathcal{B} . Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On note f l'endomorphisme dont la matrice dans la base \mathcal{B} est A .

1. Donner une base de $\text{Im}(f)$ et de $\text{Ker}(f)$.
2. Soit $y \in \text{Im}(f)$ non nul. Montrer que y est un vecteur propre. Quelle est la valeur propre associée?
3. Déterminer les valeurs propres de f .
4. L'endomorphisme f est-il diagonalisable? Si oui, donner une base de diagonalisation.
5. Diagonaliser B .

Etudiant 2 :

Exercice :

1. On pose $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que la matrice A soit diagonalisable.

2. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes suivant toutes deux une loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$.

Soit M la matrice aléatoire $M = \begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$.

Calculer la probabilité de l'évènement " M est diagonalisable".

Etudiant 3 :

Exercice :

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}$.

1. Trouver $P \in GL_2(\mathbb{R})$ et D diagonale tels que $D = P^{-1}AP$.
2. Soit B tel que $BA = AB$. Montrer que tout vecteur propre de A est vecteur propre de B . En déduire que $P^{-1}BP$ est diagonale dès que B commute avec A .
3. Trouver toutes les matrices M réelles d'ordre 2 telles que $M^2 = A$.
4. Même question avec $A = I_2$, puis $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercices supplémentaires

Exercice :

Soit $n \geq 2$. Soit u l'endomorphisme de \mathbb{R}^n dont la matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^n est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

1. Préciser le rang de cette matrice, puis déterminer une base de $\text{Im}(u)$ et de $\text{Ker}(u)$.
2. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de u . Cet endomorphisme est-il diagonalisable?