Etudiant 1 :

Exercice :

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \frac{1}{1-e^{-x}}$$

1. (a) Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire X à densité, dont on déterminera une densité.
   (b) Etudier l'espérance et la variance de X.
2. On pose $Y = \dfrac{e^X+1}{e^X-1}$.
   (a) Déterminer la fonction de répartition de Y.
   (b) Déterminer une densité de Y.
   (c) La variable aléatoire Y admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

Etudiant 2 :

Exercice :

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre 1.

1. Soit $t > 0$. Déterminer une densité de la variable $W_t = Y - tX$.
2. Déterminer, s'il existe, le moment d'ordre n (avec $n \geq 1$) de W_t.
3. En déduire une densité de la vraible $Z = \dfrac{Y}{X}$.
4. Déterminer la loi de la variable $U = \dfrac{X}{X+Y}$.

Etudiant 3 :

Exercice :

Soit U une variable aléatoire réelle suivant la loi uniforme sur $[0, 1[$.
Soit λ un réel strictement positif. On considère les variables aléatoires suivantes :

$$V = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-U), \quad W = \lfloor V \rfloor, \quad Y = V - W, \quad Z = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-Y)$$

1. Rappeler la densité et la fonction de répartition de la variable U
2. Déterminer les lois de V et W.
3. Déterminer une densité de Y ainsi que son espérance.
4. Déterminer une densité de Z.
5. On considère la variable aléatoire $X = \min(1, V)$. Déterminer la fonction de répartition de X.