Etudiant 1 :

Exercice 1 :

Soit X une V.A. qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
On pose $Y = e^X$ et $Z = \lfloor X \rfloor$.

1. Déterminer une densité de Y.
2. Déterminer la loi de X.

Exercice 2 :

Pour $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$, on définit

$$\varphi(P, Q) = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2)$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire.
2. Soit $F = Vect(X, X^2)$. Déterminer une base orthonormale de F pour le produit scalaire φ.

Etudiant 2 :

Exercice 1 :

Soit X une V.A. suivant une loi uniforme sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
Montrer que $\tan(X)$ suit la loi de Cauchy de densité $x \mapsto \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$.

Exercice 2 :
On note $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $\varphi : E^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(P, Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt$$

Montrer que φ est bien définie, puis montrer que c'est un produit scalaire sur E.

Etudiant 3 :

Exercice 1 :

Soient X et Y deux variables indépendantes telles que X suit une loi uniforme sur $[0, 1]$ et Y suit une loi exponentielle de paramètre 1.
Déterminer une densité de $X + Y$.

Exercice 2 :
Soit $\mathbb{C}$, considéré comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
Montrer que l'application

$$\varphi : (u, v) \mapsto \mathrm{Re}(u\overline{v})$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{C}$.
Déterminer sa norme euclidienne associée, et une base orthonormale de $\mathbb{C}$ pour ce produit scalaire.