Etudiant 1 :

Exercice 1 :

Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la projection orthogonale sur le plan vectoriel F d'équation :

$$x + y - 4z = 0$$

Exercice 2 :

Soit f un endomorphisme symétrique de E, i.e.

$$\forall x, y \in E, \quad < x|f(y) >< f(x)|y > .$$

1. Montrer que les sous-espaces propres de f sont orthogonaux deux à deux.
2. Montrer que si $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont supplémentaires et orthogonaux.

Etudiant 2 :

Exercice :

Soit $n \geq 1$. On note $E = \mathbb{R}_n[X]$ et on considère l'application $\varphi : E^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(P, Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt$$

1. Montrer que φ est bien définie, puis montrer que c'est un produit scalaire sur E. On pose $\|P\| = \sqrt{\varphi(P, P)}$.
2. Soit T le polynôme défini par $T(X) = 1 + \dfrac{X^n}{n!}$. Calculer $\|T\|$.
3. On pose $I = \dfrac{T}{\|T\|}$. On définit l'application θ qui, à tout polynôme P de E associe $2\varphi(P, I)I - P$.
   (a) Montrer que θ est un automorphisme de E et déterminer θ^{-1}.
   (b) Montrer que pour tout P de E, $\|\theta(P)\| = \|P\|$
   (c) Déterminer les valeurs propres possibles de θ.
   (d) θ est-il diagonalisable ?

Etudiant 3 :

Exercice 1 :

Montrer que l'application

$$(u, v) \mapsto \mathrm{Re}(u\bar{v})$$

est un produit scalaire sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.

Quelle est sa norme euclidienne associée ?

Exercice 2 :

Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et

$$\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Montrer qu'il existe un unique produit scalaire φ sur $\mathbb{R}^3$ dont on exprimera la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$, tel que $\mathcal{C}$ soit une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$.