Etudiant 1 :

Exercice 1 :

Un point se déplace dans un plan muni d'un repère orthonormé. Il part de l'origine O des coordonnées à l'instant 0. Si à l'instant $t = k$, $k \in \mathbb{N}$, il se situe au point de coordonnées (X_k, Y_k), alors à l'instant $t = k+1$, il se trouve au point de coordonnées (X_{k+1}, Y_{k+1}) de sorte que $A_{k+1} = X_{k+1} - X_k$ et $B_{k+1} = Y_{k+1} - Y_k$ suivent la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.
On suppose que les A_i et les B_j sont mutuellement indépendantes.
On notera Φ_{m,σ^2} la fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ et φ_{m,σ^2} une densité de cette loi. On rappelle que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

1. (a) Quelle est la loi suivie par X_n ?
   (b) Soit M_n le point de coordonnées (X_n, Y_n). Exprimer à l'aide de $\Phi_{0,1}$ la probabilité qu'à l'instant n, le point M_n se trouve dans le carré $C = [-1, 1]^2$.
2. Soit $D_n = \sqrt{X_n^2 + Y_n^2}$ la distance de M_n à l'origine.
   (a) Reconnaître la loi de X_n^2, puis celle de D_n^2. En déduire la loi de D_n et calculer son espérance.
   (b) Quelle est la probabilité qu'à l'instant n, le point se trouve dans le disque de centre O et de rayon 1 ?

Etudiant 2 :

Exercice :

1. Soit $n \geq 1$. On considère une variable aléatoire réelle X_n de loi exponentielle de paramètre $1/n$, et on définit la variable aléatoire Y_n par $Y_n = \lfloor X_n \rfloor$, où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière du réel x.
   (a) Préciser les valeurs prises par Y_n et déterminer la loi de Y_n.
   (b) Calculer l'espérance $E(Y_n)$ et la variance $V(Y_n)$.
2. Pour tout $n \geq 1$, on pose $Z_n = X_n - Y_n$. On définit ainsi une suite $(Z_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires réelles.
   (a) Montrer que pour tout $n \geq 1$, Z_n est une variable aléatoire à densité et déterminer une densité de Z_n.
   (b) Calculer l'espérance $E(Z_n)$. Montrer que la suite $(E(Z_n))_{n\geq 1}$ admet une limite que l'on déterminera.
   (c) Montrer que la suite $(Z_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire U dont on déterminera la loi.

Etudiant 3 :

Exercice :
Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes telles que X suit la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$ et Y suit la loi uniforme sur l'intervalle $]-1, 1[$.
On pose $T = X + Y$ et $Z = \lfloor T \rfloor$ (où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière du réel x).

1. Préciser les valeurs prises par Z.
2. Expliciter la loi de Z.
3. Calculer $E(Z)$ et $V(Z)$.
4. On désigne par F la fonction de répartition de T. Calculer $F(t)$ pour :
   (a) $t < 0$,
   (b) $t \in [0, 1[$,
   (c) $t \in [k, k+1[$ avec $k \in \mathbb{N}^*$.
5. En déduire que T est une variable aléatoire à densité et donner une densité de T.