Etudiant 1 :

Exercice :

Soit f l'application définie sur $(\mathbb{R}^{=*})^2$ à valeurs réelles, par $f(x,y) = \dfrac{x^2+xy+\sqrt{y}}{x\sqrt{y}}$.

1. (a) Montrer que f est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $(\mathbb{R}^{=*})^2$.
   (b) Déterminer les points critiques de f et leur nature.
   (c) La fonction f est-elle majorée sur $(\mathbb{R}^{=*})^2$?
2. (a) Montrer que $\forall (a,b,c) \in (\mathbb{R}^{=*})^3$, $\dfrac{a+b+c}{3} \geq (abc)^{1/3}$.
   (b) Montrer que f admet un minimum global sur $(\mathbb{R}^{=*})^2$, que l'on calculera.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ l'inéquation $e^{2x} + e^y \leq e^{x+y}(3 - e^y)$.

Etudiant 2 :

Exercice :

Soit $f : D = (\mathbb{R}^{=*})^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z) = x\ln(x) + y\ln(y) + z\ln(z)$.

1. La fonction f est-elle minorée, majorée, bornée sur D ?
2. Justifier que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D.
3. Soit $a > 0$. On note $\mathcal{C}_a = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x+y+z = 3a\}$ et on note g la restriction de f à $\mathcal{C}_a$. Montrer que si g admet un extremum local au point (x,y,z), alors
$$1+\ln(x) = 1+\ln(y) = 1+\ln(z)$$
4. Etudier l'existence des extremums locaux de g. Comparer la (les) valeur(s) obtenue(s) à celle(s) trouvée(s) à la première question.
5. Retrouver les extremums de g en se ramenant à l'étude des extremums d'une fonction de deux variables bien choisie.

Etudiant 3 :

Exercice :

1. (a) Montrer que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, on a $\left|x\ln(x^2+y^2)\right| \leq 2\sqrt{x^2+y^2}\left|\ln(x^2+y^2)\right|$.
   (b) En déduire que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, à valeurs réelles par $f(x,y) = (x^2+y^2)^x$ est prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Etudier l'existence des dérivées partielles d'ordre 1 de f en tout point.
3. Déterminer les points critiques de f.
4. (a) Montrer que f n'admet pas d'extremum local en $(0,0)$ (on pourra étudier $h : x \mapsto f(x,0) - 1$).
   (b) Montrer que f admet un minimum local en $(e^{-1}, 0)$.
   (c) Montrer que f n'admet pas d'extremum local en $(0,1)$.

Exercices supplémentaires

Exercice 1. Etudier la continuité et les dérivées partielles des fonctions
$$f(x,y) = \frac{x\sin(y) - y\sin(x)}{x^2+y^2}, \qquad f(x,y) = \frac{xy}{x+y}, \qquad f(x,y) = y^2 \sin\left(\frac{x}{y}\right)$$

Exercice 2. Montrer que la fonction f définie sur $(\mathbb{R}^{+*})^2$ par $f(x,y) = \dfrac{xy}{(1+x)(1+y)(x+y)}$ a un unique extremum, et que c'est un extremum global.

Exercice 3. Soit $f(x,y,z) = (y-z)^2 + y^3x^2$ et $g(x,y) = f(x,y,1)$ définies sur $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que g admet un unique extremum local dont on précisera la nature, cet extremum est-il global ?
2. Déterminer les points critiques de f ainsi qu'un DL2 de f en chacun de ces points. En déduire les extremums de f. Sont-ils globaux ?