Lycée Jean Perrin - MPSI
Année 2007-2008

# Colle de Maths - Semaine 27

Espaces vectoriels euclidiens - Topologie de $\mathbb{R}^n$.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **Cours :**<br><br>Normes usuelles sur $\mathbb{R}^2$. Equivalence de ces normes. | **Commentaires :** | **Cours :**<br><br>Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt | **Commentaires :** | **Cours :**<br><br>Inégalité de Cauchy-Schwarz.<br>Cas d'égalité. | **Commentaires :** |
| **Exercice 1 :**<br><br>Soit $E = \mathbb{R}^3$, muni du produit scalaire usuel. Soit :<br>$F = \{x \in \mathbb{R}^3 \ / x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$<br>Déterminer une base orthonormale de $F$ et de $F^\perp$. | | **Exercice 1 :**<br><br>Vérifier que :<br>$N(x,y) = \displaystyle\int_0^1 \lvert x+ty\rvert dt$<br>définit une norme sur $\mathbb{R}^2$.<br>Construire la sphère unité relative à cette norme. | | **Exercice 1 :**<br><br>Soit $E = \mathbb{R}^4$ et $F = Vect(v_1, v_2)$ avec :<br>$v_1 = (1,2,-1,1)\ ,\ v_2 = (0,3,1,-1)$<br>Déterminer une base orthonormale et un système d'équations de $F$ et $F^\perp$. | |
| **Exercice 2 :**<br><br>Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\lVert . \rVert_\infty$. Vérifier que l'ensemble<br>$\Omega = \{f \in E \ / \ \forall x \in [0,1], f(x) \neq 0\}$<br>est une partie ouverte de $E$. | | **Exercice 2 :**<br><br>Soit $E = \mathbb{R}^4$ et :<br>$F = \left\{ X \in \mathbb{R}^4 \ / \ \Big\vert \begin{array}{l} x+y+z+t=0 \\ x-y+z-t=0 \end{array} \right\}$<br>Former la matrice de la projection orthogonale sur $F$ dans la base canonique de $E$. | | **Exercice 2 :**<br><br>Vérifier que :<br>$N(x,y) = \sup\limits_{t\in[0,1]} \lvert x+ty\rvert$<br>définit une norme sur $\mathbb{R}^2$.<br>Construire la boule unité fermée relative à cette norme. | |
| **Exercice 3 :**<br><br>Soit $ABC$ un triangle du plan et $I$ le milieu de $[BC]$.<br>On note $a,b,c,m$ les longueurs $[BC]$,$[AC]$,$[AB]$,$[AI]$.<br>Exprimer $m$ en fonction de $a,b,c$. | | **Exercice 3 :**<br><br>Résoudre l'équation :<br>$(1-x)^2+(x-y)^2+(y-z)^2+z^2 = \dfrac{1}{4}$<br>d'inconnue $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. | | **Exercice 3 :**<br><br>Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $\forall P,Q \in E$,<br>$\varphi(P,Q) = \displaystyle\int_{-1}^1 P(t)Q(t)(1+t^2)dt$<br>Montrer que $\varphi$ est un produit scalaire sur $E$ et construire une base orthonormale de $E$ pour ce produit scalaire. | |