Colle de Maths - Semaine 8

Coniques - Ensembles, Applications.

Cours : Caractérisation des bijections et conséquences.	**Commentaires :**	**Cours :** Définition, contraposée, négation de f injective. Définition, négation de f surjective. Exemples, contre-exemples.	**Commentaires :**	**Cours :** $g \circ f$ injective $\Rightarrow f$ injective. $g \circ f$ surjective $\Rightarrow g$ surjective.	**Commentaires :**
Exercice 1 : Soit $f : E \to E$. Montrer que $f \text{ surj.} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \forall g, h : E \to E, \\ (g \circ f = h \circ f) \Rightarrow (g = h) \end{array}$		**Exercice 1 :** Pour $z \in \mathbb{C}$, on définit $F(z) = z^2 - (9-2i)z + 26$ Préciser l'ensemble Γ_1 (resp. Γ_2) des points d'abscisse z tels que $F(z)$ soit réel (resp. imaginaire pur).		**Exercice 1 :** Soit $f : E \to F$. Montrer que $f \text{ inj.} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \forall D, \forall g, h : D \to E, \\ (f \circ g = g \circ h) \Rightarrow (g = h) \end{array}$	
Exercice 2 : Etudier la courbe $\mathcal{C}$ qui dans un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ a pour équation cartésienne : $x^2 + 6xy + y^2 + 16x - 9 = 0$ Préciser les tangentes aux points d'intersection avec l'axe $(O, \overrightarrow{j})$.		**Exercice 2 :** $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ x & \mapsto & \left(\frac{x}{x^2-1}, \frac{x^2}{x-1}\right) \end{array}$ L'application f est-elle injective ?		**Exercice 2 :** On considère un point M d'une ellipse de centre O. On lui associe un point P tel que la tangente en P à l'ellipse soit parallèle soit parallèle à la droite (OM). Montrer que 1. $\mathcal{A}_{(OPM)}$ est constante (la calculer). 2. $\Vert\overrightarrow{OM}\Vert^2 + \Vert\overrightarrow{OP}\Vert^2$ est constante.	
Exercice 3 : Soit $a \in \mathbb{R}$ fixé et $f : x \mapsto \frac{2x-1}{x-a}$ Montrer que f réalise une bijection entre deux parties de $\mathbb{R}$ que l'on déterminera.		**Exercice 3 :** Soient $f, g, h : E \to E$ telles que $\left\{ \begin{array}{l} h \circ g \circ f \text{ surjective} \\ g \circ f \circ h \text{ surjective} \\ f \circ h \circ g \text{ injective} \end{array} \right.$ Montrer que f, g et h sont bijectives.		**Exercice 3 :** Soient E, F deux ensembles, $A \subset E$ et $B \subset F$. Montrer que pour tout $f : E \to F$, $f\left(A \cap f^{-1}(B)\right) = f(A) \cap B$	