Colle de Maths - Semaine 9

Ensembles, applications - Relations d'ordre, nombres réels.

Cours : Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.	**Commentaires :**	**Cours :** Définition d'une relation d'ordre. Unicité du plus grand élément sous réserve d'existence.	**Commentaires :**	**Cours :** Images réciproques : définition et propriétés d'inclusion.	**Commentaires :**
Exercice 1 : Déterminer les bornes inférieures et supérieures de $\left\{\frac{1}{n}+(-1)^n\ ,\ n\in\mathbb{N}^*\right\}$		**Exercice 1 :** Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}^*$, on a $E\left(\frac{E(nx)}{n}\right)=E(x)$		**Exercice 1 :** Montrer que $\{\ln n-\ln p\ ,\ ,n,p\in\mathbb{N}^*\}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.	
Exercice 2 : Pour $n\in\mathbb{N}^*$, simplifier $\sum_{k=0}^{n^2} E(\sqrt{k})$		**Exercice 2 :** Soit $J\subset\mathbb{R}$, $J\neq\emptyset$. On définit la relation $\leq$ sur $J^{\mathbb{R}}$ par : $f\leq g \Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}, f(x)\leq g(x)$ 1. Montrer que $\leq$ est une relation d'ordre sur $J^{\mathbb{R}}$. 2. Donner une CNS sur J pour que ce soit un ordre total. 3. Donner une CNS sur J pour que $J^{\mathbb{R}}$ admette un plus grand élément.		**Exercice 2 :** Déterminer s'ils existent sup, inf, max, min de l'ensemble $\left\{\frac{3n-1}{2n+3}\ ,n\in\mathbb{N}\right\}$	
Exercice 3 : Soit $f:E\to F$ une application. Montrer que $f inj. \Leftrightarrow \forall A\subset E,\ A=f^{-1}(f(A))$ $f surj. \Leftrightarrow \forall B\subset F,\ f\left(f^{-1}(B)\right)=B$		**Exercice 3 :** Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $f_n(x)=x^n(1-x)$ Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty}\ \sup\limits_{x\in[0,1]} f_n(x)$.		**Exercice 3 :** Soit $x\in\mathbb{R}$. Montrer que $E(x)+E(-x)=\begin{cases}-1 & \text{si } x\notin\mathbb{Z}\\ 0 & \text{si } x\in\mathbb{Z}\end{cases}$ En déduire que si $p,q\in\mathbb{N}^*$ sont tels que $\frac{p}{q}$ est irréductible, alors $\sum_{k=1}^{q-1} E\left(k\frac{p}{q}\right)=\frac{(p-1)(q-1)}{2}$	