Colle de Maths - Semaine 12

Généralités sur les fonctions. Etude locale des fonctions : limites et continuité.

Cours : Théorème de la limite monotone.	**Commentaires :**	**Cours :** Etude de la continuité de $x \mapsto E(x) + (x - E(x))^2$	**Commentaires :**	**Cours :** Caractérisation séquentielle de la limite.	**Commentaires :**
Exercice 1 : Soit f décroissante telle que la fonction $g : x \mapsto xf(x)$ soit croissante. Montrer que si $\exists \alpha > 0 \ / \ f(\alpha) = 0$, on a $f \equiv 0$ sur $[\alpha, +\infty[$.		**Exercice 1 :** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que : - $f \circ f$ est croissante. - $f \circ f \circ f$ est strictement décroissante. Montrer que f est strictement décroissante.		**Exercice 1 :** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, T-périodique ayant une limite L en $+\infty$. Montrer que f est constante sur $\mathbb{R}$.	
Exercice 2 : Etudier la continuité de $f : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ x & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$		**Exercice 2 :** $f : \begin{array}{ccl} [0,2] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 2-x & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$ Montrer que f admet une limite l en un unique point $a \in]0,2[$. Déterminer a et l.		**Exercice 2 :** $f : \begin{array}{ccl}]0,1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \\ \dfrac{1}{q} & \text{si } x = \dfrac{p}{q} \\ & (p \wedge q = 1) \end{cases} \end{array}$ 1. Etudier la continuité de f en tout rationnel de $]0,1[$. 2. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que $X_\varepsilon = \{x \in]0,1[\ / \ f(x) \geq \varepsilon\}$ est un ensemble fini. En déduire que f est continue en chaque irréationnel de $]0,1[$.	
Exercice 3 : Etudier la limite en 0 de $f : x \mapsto \frac{1}{x}\left(e^{E(x)} - 1\right)$		**Exercice 3 :** Déterminer $\lim\limits_{x \to 1} \frac{1-x}{\text{Arccos } x}$		**Exercice 3 :** Calculer $\lim\limits_{x \to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 5x + 4}$	