Colle de Maths - Semaine 15

Convexité. Suites récurrentes. Approximation.

Cours : Fonctions convexes : cas des fonctions dérivables et deux-fois dérivables.	**Commentaires :**	**Cours :** Théorème de Rolle, théorème des accroissements finis.	**Commentaires :**	**Cours :** Fonctions convexes : définition. Inégalité de Jensen.	**Commentaires :**
Exercice 1 : Soit $p, q > 0$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Montrer que $$\forall a, b \geq 0,\ \sqrt[p]{a}\sqrt[q]{b} \geq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}$$		**Exercice 1 :** Montrer que $f :]1, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \ln(\ln x)$ est concave. En déduire que $\forall x, y \in]1, +\infty[$, $$\sqrt{\ln x . \ln y} \leq \ln\left(\frac{x+y}{2}\right)$$		**Exercice 1 :** Soit $p, q > 0$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Montrer que $$\forall a, b > 0,\ \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab$$	
Exercice 2 : Etudier la suite (u_n) définie par : $$\begin{cases} u_0 \geq 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{2}{1+u_n^2} \end{cases}$$		**Exercice 2 :** Etudier la suite (u_n) définie par : $$\begin{cases} u_0 \geq 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{6}\left(u_n^2 + 8\right) \end{cases}$$		**Exercice 2 :** Etudier la suite (u_n) définie par : $$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n(1 - u_n) \end{cases}$$	
Exercice 3 : Etudier la suite (u_n) définie par : $$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{3}\left(4 - u_n^2\right) \end{cases}$$		**Exercice 3 :** Etudier la suite (z_n) définie par : $$\begin{cases} z_0 \geq 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ z_{n+1} = \frac{i}{2} z_n + 1 \end{cases}$$		**Exercice 3 :** Etudier la suite (u_n) définie par : $$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2+u_n} \end{cases}$$	