Colle de Maths - Semaine 17

Entiers relatifs, arithmétique. Loi de c.i., groupes.

Cours : Image directe d'un sous-groupe par un morphisme de groupes.	**Commentaires :**	**Cours :** Un morphisme de groupes est injectif ssi son noyau est réduit au neutre.	**Commentaires :**	**Cours :** Image réciproque d'un sous-groupe par un morphisme de groupes.	**Commentaires :**
Exercice 1 : Soient $a \in \mathbb{N}^*$ et $n \geq 2$. Montrer que $a^n - 1 \text{ premier} \Rightarrow (a = 2 \text{ et } n \text{ premier})$		**Exercice 1 :** Soit p premier. 1. Soit $k \in \mathbb{N}$ / $0 < k < p$. Montrer que $p \mid \binom{p}{k}$ 2. Montrer que pour tous $m, n \in \mathbb{Z}$, $(m+n)^p \equiv m^p + n^p \; [p]$		**Exercice 1 :** Montrer que si $2^n + 1$ est un nombre premier, alors n est nécessairement une puissance de 2.	
Exercice 2 : Soit $E = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. On munit E de la loi $*$ définie par : $\forall (a,b), (a',b') \in E$, $(a,b) * (a',b') = (aa', ba' + b'\varphi(a))$ où $\varphi : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$. A quelles conditions sur φ, $(E, *)$ est-il un groupe ?		**Exercice 2 :** On munit l'intervalle de $]-1,1[$ de la loi $*$ définie par : $\forall x, y \in]-1,1[$, $x * y = \dfrac{x+y}{1+xy}$ Montrer que $(]-1,1[, *)$ a une structure de groupe.		**Exercice 2 :** Montrer que $\mathcal{A} = \left\{ f_{a,b} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & ax+b \end{array} \right\}$ est un groupe pour la loi $\circ$. Est-il commutatif ?	
Exercice 3 : Montrer que tout morphisme de $(\mathbb{Q}, +)$ dans $(\mathbb{Z}, +)$ est l'application nulle.		**Exercice 3 :** Soit G un groupe tel que $\forall x \in G, \; x^2 = e_G$ Montrer que G est commutatif.		**Exercice 3 :** Montrer que l'ensemble des nombres premiers congrus à -1 modulo 4 est infini.	