Colle de Maths - Semaine 18

Loi de c.i., groupes. Anneaux, corps. Espaces vectoriels.

Cours :	**Commentaires :**	**Cours :**	**Commentaires :**	**Cours :**	**Commentaires :**
Si $xy=yx$, $x^n-y^n=(x-y)\sum\ldots$.		Intersection de sous-espaces vectoriels.		L'ensemble des inversibles d'un anneau est un groupe.	
Exercice 1 : Soit $\mathbb{Z}[i]$ le sous-ensemble de $\mathbb{C}$ défini par $\mathbb{Z}[i]=\{x+iy \ / \ x,y\in\mathbb{Z}\}$ Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un sous-anneau de $(\mathbb{C},+,\times)$ et déterminer ses éléments inversibles.		**Exercice 1 :** Soit $(A,+,\times)$ un anneau tel que $\forall a\in A, a^2=a$. Montrer que 1. $\forall a\in A,\ a+a=0_A$ 2. A est commutatif 3. $\forall a,b\in A,\ ab(a+b)=0$ En déduire que si $Card(A)\geq 3$, alors il existe dans A des éléments non nuls dont le produit est nul.		**Exercice 1 :** On définit dans $\mathbb{Q}$ la loi interne $*$ définie par $\forall a,b\in\mathbb{Q},\ a*b=a+b-ab$ $(\mathbb{Q},+,*)$ est-il un corps commutatif ?	
Exercice 2 : Soient A,B et C trois sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E tels que $(A\cap C)\subset B$, $C\subset(A+B)$ et $B\subset C$. Montrer que $B=C$.		**Exercice 2 :** $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ / \ x+y-z=0\}$ $G=\{(a-b,a+b,a-3b) \ / \ a,b\in\mathbb{R}\}$ 1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. 2. Déterminer $F\cap G$.		**Exercice 2 :** Soit $E=\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $\mathcal{C}$ l'ensemble des fonctions de E croissantes et $\Delta=\{f-g \ / \ f,g\in\mathcal{C}\}$. Montrer que Δ est un sous-espace vectoriel de E .	
Exercice 3 : Soit F un sous corps de $(\mathbb{Q},+,\times)$. Montrer que $F=\mathbb{Q}$.		**Exercice 3 :** Soit $d\in\mathbb{N}$ tel que $\sqrt{d}\notin\mathbb{Q}$. On note $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]=\{a+b\sqrt{d} \ / \ a,b\in\mathbb{Q}\}$ Montrer que $(\mathbb{Q}[\sqrt{d}],+,\times)$ est un corps.		**Exercice 3 :** Soit a,b deux éléments d'un anneau $(A,+,\times)$ tels que ab soit inversible et b non diviseur de 0. Montrer que a et b sont inversibles.	